**I. PHƯƠNG TRÌNH**

# **1. Không có tham số**

## **Dạng 1: Biến đổi tương đương**

1. Giải phương trình ****

**Lời giải**

+Biến đổi phương trình tương đương :



1. Giải phương trình 

**Lời giải**

Điều kiện: 

Nhận thấy  là một nghiệm của phương trình.

Xét  Khi đó phương trình đã cho tương đương với

Vì  nên  và  Suy ra  vì vậy



Do đó phương trình 

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là  hoặc 

1. *[Đề thi hsg Bắc Sơn, Lạng Sơn]* Giải phương trình sau : 

**Lời giải**

****

1. Giải phương trình: ,với .

**Hướng dẫn giải.**









1. Giải phương trình .

**Hướng dẫn giải.**



Tìm được nghiệm duy nhất x=2/3

1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình .

**Hướng dẫn giải**

Ta có:







Vì 7 là số nguyên tố nên ta có các trường hợp sau:

; ; ; 

Giải ba hệ phương trình trên ta được: .

1. **(THPT Quảng Xương 2 – Thanh Hóa, 2009-2010)** Giải phương trình:



**Hướng dẫn giải**

Đặt  ta được 

Giải ta được  suy ra 

## **Dạng 2: Đặt ẩn phụ**

1. Giải phương trình trên tập số thực: (1).

**Hướng dẫn giải**

Điều kiện: .

****

**** không là nghiệm của phương trình.

.

Đặt .

Phương trình trở thành: .

Khi đó ta có: . Vậy .

1. Giải phương trình sau trên tập số thực: .

**Hướng dẫn giải**

Phương trình (1) .

Đặt . Ta có phương trình:

(\*).

.

Phương trình (\*)



.

Vậy .

1. Giải phương trình sau trên tập số thực: .

**Hướng dẫn giải**

Đặt . Điều kiện: 

Ta có: 

Thay vào phương trình ta được:  



+)  : phương trình vô nghiệm do 



Vậy  là nghiệm phương trình.

1. Giải phương trình sau



**Lời giải**

Nhận xét rằng  không là nghiệm của phương trình đã cho.

Suy ra . Chia cả hai vế của phương trình cho  rồi đặt , ta có phương trình  

Xét hàm số .

Ta có hàm số  liên tục trên  và .

Suy ra hàm số  luôn đồng biến trên khoảng .

Khi đó phương trình đã cho có dạng 

 (do )

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là  và .

1. Giải phương trình sau : 

**Lời giải**

Đặt .





Điều kiện xác định: 

Đặt  Ta có .

Phương trình đã cho trở thành







(tm đk).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là 

1. Giải phương trình:  (1)

* Điều kiện: 
*  và  do đó  và .
* (1) ⇔ 

⇔ 

* Đặt: a = 8 + 4 > 1, t = x2 – 2x -12. Điều kiện: t > 0.
* Do đó: (1) ⇔ lna + 1(t + 1) = lnat

Cách 1: (1) ⇔ lna + 1(t + 1) = lnat .

* Từ (I) ta được: 
* y = 1: là nghiệm của (2).
* y < 1: , y < 1: .
* Nên (2) có nghiệm duy nhất: y = 1. Do đó: (1) t = a ⇔ x2 – 2x – 12 = 8 + 4 ( thỏa \*)

⇔ x2 – 2x – 20 - 4 = 0 ⇔ x = 2 + 2 hoặc x = -2.

* Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: x = 2 + 2 hoặc x = -2.

Cách 2: Xét hàm số y = f(t) = lna + 1(t + 1) - lnat (a >1

* Ta được:  vì a > 1, nên hàm số giảm trên (0; +∞) và ta có f(t) = 0 có nghiệm t = a nên f(t) có nghiệm duy nhất t = a.
* Vậy: (1) (1) ⇔ lna + 1(t + 1) = lnat ⇔ t = a x2 – 2x – 12 = 8 + 4 ( thỏa \*)

⇔ x2 – 2x – 20 - 4 = 0 ⇔ x = 2 + 2 hoặc x = -2.

* Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: x = 2 + 2 hoặc x = -2.

1. Giải phương trình:  (1).

*  nên điều kiện là: x ≥ -1.
* x2 + 2x + 2 = (x +1) + (x2 + x + 1), đặt , 
* Với điều kiện x ≥ -1: (1) trở thành:

3(a2 + b2) = 10ab ⇔ 3a2 – 10ab + 3b2 = 0 ⇔ (a – 3b)(3a – b) = 0 ⇔ a = 3b hay a = b/3.

* a = 3b ⇔ =3 ⇔ x + 1 = 9(x2 + x + 1) ⇔ 9x2 + 8x + 8 = 0 (vô nghiệm)
* a = b/3 ⇔ 3a = b ⇔3 =⇔9(x + 1) = x2 + x + 1 ⇔ x2 - 8x - 8 = 0 

Vậy phương trình có hai nghiệm:.

1. Giải phương trình : 

Điều kiện: x  -1

+) Nếu x > 3 thì:

x- 3x + 2 = (x – 1) - 3(x- 1) > 4(x – 1) – 3(x – 1) = x – 1 >  Chứng tỏ x > 3 không thỏa mãn

Với -1  x  3

Đặt x = 2cost + 1 ( 0  t  )

Khi đó phương trình trở thành:

(2cost + 1) - 3(2cost + 1) + 2 = 

 8cost – 6cost = 

 2cos3t = 2cos

 cos3t = cos

1. Giải phương trình 

**Hướng dẫn giải**

Điều kiện xác định: 

Đặt  Ta có .

Phương trình đã cho trở thành





.

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm là 

1. *[Đề chọn hsg tỉnh Trà Vinh, 2014-2015]* Giải phương trình : 
2. *[Đề thi hsg tỉnh Vĩnh Long, 2015-2016]* Giải phương trình 

**Lời giải**

Phương trình tương đương với 

Đặt , ta có phương trình 



Vì  nên 



Tập nghiệm 

1. Giải phương trình: ,với 

**Hướng dẫn giải.**

Từ pt ta thấy 

(1) 

Đặt: 

Pt trở thành: 





Giải phương trình 

1. Giải phương trình: .

**Hướng dẫn giải.**

Đặt  từ phương trình ta có 

Như vậy: ngược hướng

Suy ra: (1)

Giải (1) và thử lại ta thấy phương trình đã cho có nghiệm là 

1. Giải phương trình: ,với 

**Hướng dẫn giải.**

Đk: 

Đặt 

Ta có: 







Vậy phương trình có một nghiệm: ,

Giải phương trình: .

1. Giải phương trình: 

**Hướng dẫn giải.**

Phương trình đã cho có điều kiện 

Với điều kiện trên ta có:





Đặt  ta có:

Với  ta có : 

So với điều kiện , phương trình đã cho có nghiệm 

1. Giải phương trình sau trên tập số thực: .

**Hướng dẫn giải.**

Điều kiện:  Đặt  (),

ta thu được hệ 

Suy ra





Do vậy 

Thay vào, thử lại thấy  thỏa mãn.

Đáp số: 

1. Giải phương trình: .

**Hướng dẫn giải.**



= 0

 (x = 0 không là nghiệm)

Đặt  ta được 

So với điều kiện ta được 

So với điều kiện , ta được 

1. Giải phương trình sau:  với .

**Hướng dẫn giải.**

Đặt . Khi đó phương trình trở thành:



(\*)

(\*) 

• Với  thì  có một nghiệm là 

• Với  thì  có một nghiệm là 

**•** Khi  thì 

 hoặc .

**•**Khi thì

 hoặc .

1. Giải phương trình .

**Hướng dẫn giải.**

Điều kiện 

Đặt  ta có



Phương trình đã cho trở thành



Ta có  nên 

Ta được phương trình 

Với  thì 

Với  thì 

1. Giải phương trình .

**Hướng dẫn giải.**

Ta có phương trình tương đương với







Xét (1), đặt , suy ra  và .

Ta được 



. Từ đó suy ra .

Thử lại ta được nghiệm của phương trình là  và .

1. Giải phương trình .

**Hướng dẫn giải**

Phương trình tương đương với .

Đặt , ta có phương trình 



Vì  nên 





Tập nghiệm .

1. *(Chuyên Hưng Yên )* Giải phương trình 

**Hướng dẫn giải**



Đặt , ta được hệ:  
Trừ vế với vế hai phương trình trên, ta được:



TH1: 



TH2: 



 phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm: 

1. Giải phương trình : .

**Hướng dẫn giải**

Đặt   .

Từ phương trình đã cho ta có : (\*)

Ta có : (\*) 



Với  ta có 

Đặt  từ phương trình (\*\*) ta có :(\*\*\*)

Dùng máy tính điện tử hoặc khảo sát hàm số  trên  ta thấy (\*\*\*) có một nghiệm duy nhất 

Ta biểu diễn  dưới dạng:

Ta có :  nên có thể chọn  sao cho :

Vậy ta có : 

Như vậy  được chọn là nghiệm của phương trình :

Suy ra: 

Ta tìm được nghiệm của (\*\*\*) là

 .Suy ra : 

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm

 ; 

1. Giải phương trình sau: .

**Hướng dẫn giải:**

Ta có: 



Đặt ,. Phương trình trở thành:





## **Dạng 3. Sử dụng hàm số**

1. Giải các phương trình sau:

a) 

b) .

1. Giải phương trình sau:

a) 

b) 

1. Giải phương trình .

Giải phương trình: 

* Phương trình đã cho tương đương với: 
* Xét x = 0; x = ± 1: Thay vào (1) ta thấy đều thỏa nên phương trình có các nghiệm: x = 0; x = ± 1.
* Xét x ≠ 0; x ≠ ± 1: Khi đó (1) ⇔ 

Với t ≠ 0, xét hàm số: .

\* Với t > 0 thì 3t – 1 > 0 ⇒f(t) > 0 và với t < 0 thì 3t – 1 < 0 ⇒ f(t) > 0, do đó:

Vì (2) ⇔ f(x) + f(x2 – 1) = 0 nên (2) vô nghiệm.

* Vậy phương trình đã cho có tất cả là 3 nghiệm: x = 0; x = ± 1.

1. *[Đề chọn hsg tỉnh Trà Vinh, 2014-2015]* Giải phương trình : 
2. Giải phương trình: .

Ta có  (1).

Đặt  thì  do đó  đồng biến và liên tục trên . Từ đó:

.

.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm.

1. Giải phương trình  (1)

**Hướng dẫn giải**

Có  không là nghiệm của (1)

Xét , chia hai vế cho , được



Đặt , khi đó có PT



Suy ra 

Xét hàm số .Vì f(t) là hàm số đồng biến trên R

nên    = 

Giải tìm được y = 0 (loại); 

Tính x theo 

Tập nghiệm của phương trình (1) là 

1. Giải phương trình .

**Hướng dẫn giải.**

Điều kiện: 

Phương trình 

Ta có: x = 0, x = 5 không là nghiệm phương trình.

Xét hàm số ; ta có:  (\*)

Áp dụng (\*) với 

Ta có: 

. Vậy  là nghiệm phương trình.

1. Giải phương trình .

**Hướng dẫn giải.**

Đặt **** ta được: 

 (\*)

Xét hàm số  trên  có 

⇒ hàm số  đồng biến trên ; (\*) 



Thử lại, ta được:  là nghiệm phương trình.

1. Giải phương trình : trên .

**Hướng dẫn giải**

Đặt .Với  ta có .

Phương trình đã cho trở thành : (\*)

Với  Ta có:  

Vậy trên  phương trình đã cho có nghiệm .

1. Giải phương trình: .

**Lời giải**

Biến đổi phương trình:  (1)

Đa thức  có tối đa 3 nghiệm và ta có: ; ; ; .  liên tục trên khoảng  và , ,  nên  có 3 nghiệm trên khoảng .

Do  có đúng 3 nghiệm trong khoảng , nên ta có thể đặt  với .

Phương trình (1) trở thành:



 (do )

 (với )

 hay  hay .

1. Giải phương trình sau: .

**Hướng dẫn giải**

Điều kiện .

Đặt .

Từ phương trình đã cho ,ta có hệ phương trình: 

Đặt S = x + y; P = xy đưa đến hệ phương trình: 







Kết hợp với điều kiện, nghiệm pt đã cho là:.

1. Giải phương trình:.

**(Chưa giải)**

1. Giải phương trình: 

**(Chưa giải)**

**Dạng 3: Sử dụng hàm số**

1. Cho phương trình:  với. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên  thì phương trình có một nghiệm dương duy nhất 

**Hướng dẫn giải:**

Xét hàm số với ** nguyên,  (1)

+) Ta có: . Do  nên khi  thì  Vậy  là hàm số đồng biến trên .

Lại có:  ( vì  nguyên và )

Ta có:  và  liên tục, đồng biến nên phương trình  có nghiệm duy nhất trên .

+) Mặt khác với  thì  suy ra  với mọi 

Như vậy ta đã chứng minh được (1) có nghiệm dương duy nhất với mọi ** nguyên, 

1. Cho phương trình: .
2. Chứng tỏ phương trình (1) có đúng 5 nghiệm.
3. Với  là nghiệm của phương trình nghiệm, tính tổng:

**Hướng dẫn giải**

1. Xét hàm số: .

\* f(x) là hàm số xác định và liên tục trên R.

\* Ta có: 

 ; 



 Phương trình  có 5 nghiệm phân biệt 

sao cho: 

\* Ta có  là nghiệm của (1) nên:





Do đó: 

Xét biểu thức: 

Đồng nhất thức ta được:



Do vậy: 

Mặt khác: 



 Với  ta được: 

và 

Do đó: 





Vậy: .

## **Dạng 4: Đánh giá**

1. Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình:



**Hướng dẫn giải**

Xem (1) là phương trình bậc hai ẩn x ta có: (1) .

\* Để (1) có nghiệm x nguyên điều kiện cần là:  ( k nguyên, không âm)

\* Lại xem  là phương trình bậc hai ẩn y . Để có nghiệm nguyên y điều kiện cần là  là một số chính phương (m nguyên dương).

Do  và 16 = 16.1 = 8.2 = 4.4 nên ta có các trường hợp.

+) TH1:  suy ra phương trình (1) có nghiệm .

+) TH2:  suy ra phương trình (1) có nghiệm .

+) TH3 :  Loại.

1. *[Đề xuất, Chuyên Hùng Vương Phú Thọ, DHĐBBB, 2015]* Giải phương trình 

**Lời giải**

Điều kiện: 

Nhận thấy  là một nghiệm của phương trình.

Xét  Khi đó phương trình đã cho tương đương với





Vì  nên  và  Suy ra 

vì vậy



Do đó phương trình 

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là  hoặc 

1. *[Đề thi hsg tỉnh Nghệ An, bảng A, 2015-2016]* 
2. Ký hiệu  là số nguyên lớn nhất không vượt quá *x*. Giải phương trình



**Hướng dẫn giải**

Ta có 

pt





Vậy .

# **Có tham số**

1. Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt

**.**(1)

**Hướng dẫn giải**

Đặt  ; điều kiện: .

Ta có:  (2)

Pt (2) có hai nghiệm phân biệt .Vậy .

Thay vào phương trình ta được:  (3)

Đặt .

Ta có: số giao điểm của (C) và (d) là số nghiệm phương trình (3).

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi phương trình (2) có đúng 1 nghiệm.

Xét hàm số  ; .

Cho .

Bảng biến thiên

|  |  |
| --- | --- |
| t | 1 2 +∞ |
| y’ | * 0 + |
| y | 8 +∞  7 |

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt .

1. Tìm tất cả các giá trị của tham số  để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân: 

**Hướng dẫn giải**

Phương trình đã cho tương đương:

.

Phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1, hay:  (\*).

Khi đó, PT đã cho có ba nghiệm  và , trong đó là nghiệm của (1).

Theo định lý Viet ta có  (2).

Xét các trường hợp sau:

\*) Nếu  (3). Từ (2) và (3) ta có hệ:

.

\*) Nếu  (4). Từ (2) và (4) ta có hệ: .

Vậy, có ba giá trị của *m* thỏa mãn yêu cầu bài toán là:.

1. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình  có nghiệm

**Hướng dẫn giải.**

Lời giải:

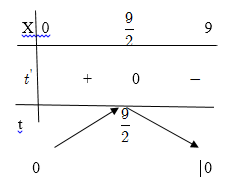
Điều kiện: 

PT (1) 

 (2)

Đặt 

Ta có: ; 



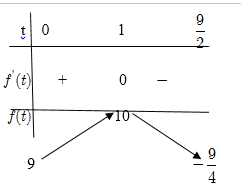
Do đó : 

Phương trình (2) trở thành  (3)

Xét hàm số , 

Ta có : 

Bảng biến thiên :



Phương trình (1) có nghiệm  phương trình (3) có nghiệm 



1. Tìm  để phương trình sau (ẩn ) chỉ có một nghiệm.



1. Cho hai phương trình sau:

(1)



(2)



(a là tham số, x là ẩn số)

Tìm a để số nghiệm của phương trình (1) không vượt quá số nghiệm của phương trình (2).

1. Cho phương trình:  có một nghiệm không nhỏ hơn 4. Chứng minh rằng phương trình  có nghiệm.
2. Với mỗi số tự nhiên **, gọi  là số nghiệm của phương trình

 .

Tính giới hạn sau 

**Lời giải**

Giả sử  là một nghiệm của phương trình  , khi đó mọi nghiệm của phương trình trên có dạng 

Vì *x* ≥ 0 và *y* ≥ 0 nên .

Suy ra 

Suy ra 

Kết hợp với , ta có .

Vậy 

1. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm

.

**Hướng dẫn giải.**

Điều kiện :

PT (1)  (2)

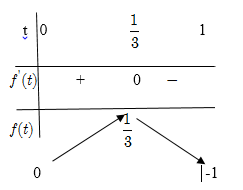
Đặt , Do 

Phương trình (2) trở thành :  (3)

Xét hàm số , 

Ta có : 

Bảng biến thiên :



Phương trình (1) có nghiệm  phương trình (3) có nghiệm 



1. Cho phương trình

.

Tìm m để phương trình có nghiệm thực.

**Hướng dẫn giải.**

Với tập xác định , Phương trình đã cho tương đương với

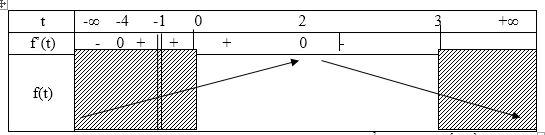
.

Đặt t =  thì t ∈ [ 0; 3)

Xét hàm số ;

f’(t) = ; f’(t) = 0 ⇔ t = - 4 hoặc t = 2.

Bảng biến thiên của hàm số f(t) trên đoạn [ 0; 3 ]



Phương trình đã cho có nghiệm x ∈ [ - 2; 4) ⇔ Đường thẳng y = m cắt đồ thị hàm số f(t), t ∈ [ 0; 3 ] ⇔ - 6 ≤ m ≤ - 2

1. Cho phương trình: , với m là tham số. Tìm tham số m để phương trình có nghiệm thực.

**Hướng dẫn giải.**

Điều kiện: .Đặt  với 

Ta có: ; 

suy ra: 

Do  nên phương trình trở thành: 

1. Tìm m để pt sau có nghiệm .

**Hướng dẫn giải.**

. Ta đưa pt về dạng đẳng cấp



Từ pt suy ra 

Chia hai vế pt cho , ta được 

Đặt , lập bbt với  tìm được 

P t trở thành  (1)

Phương trình ban đầu có nghiệm khi và chỉ khi pt (1) có nghiệm thuộc t thuộc (0;2).

Tìm được 

1. (**Chuyên Hưng Yên**). Giả sử với hai số dương  thì phương trình  có các nghiệm đều lớn hơn 1. Xác định giá trị của  để biểu thức  đạt giá trị nhỏ nhất và tìm giá trị nhỏ nhất đó (là số nguyên dương cho trước).

**Hướng dẫn giải**

Gọi là các nghiệm của phương trình đã cho.

Theo định lý Vi-et ta có 

Theo bất đẳng thức AM - GM ta được

hay 

Theo bất đẳng thức

thì 

hay 

Suy ra , do (\*)

Do đó ta có 

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  Khi đó phương trình có ba nghiệm trùng nhau và đều bằng  Vậy giá trị nhỏ nhất của là  khi 

1. Giải phương trình .
2. Tìm  để BPT sau vô nghiệm: 
3. Giải bất phương trình 
4. Chứng minh phương trình: có ít nhất 2 nghiệm với 

**Hướng dẫn giải**

Xét phương trình:  (1)

Xét hàm số:

 sao cho 

 sao cho 



Hàm số  liên tục trên các đoạn  và 

 phương trình có ít nhất 1 nghiệm  và ít nhất 1 nghiệm 

Vậy phương trình có ít nhất 2 nghiệm.

1. Cho các phương trình:  (1)

 (2)

trong đó *x* là ẩn số và *m* là tham số (0 < *m* < 1).

1) Chứng tỏ rằng phương trình (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt và 1 nằm trong khoảng nghiệm.

2) Chứng minh phương trình (2) có nghiệm.

**(Chưa giải)**

1. Cho phương trình.

Tìm tất cả các giá trị của *m* để phương trình trên có 3 nghiệm phân biệt thoả mãn điều kiện: .

**(Chưa giải)**

1. Tìm điều kiện của tham số a, b để phương trình sau có các nghiệm lập thành cấp số cộng: 

**(Chưa giải)**

1. Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất: 

**(Chưa giải)**

1. Tìm các giá trị của a để phương trình sau chỉ có một nghiệm:



**(Chưa giải)**

1. Giả sử phương trình  có 3 nghiệm phân biệt.

Hãy xét dấu của biểu thức: 

**Hướng dẫn giải**



+ Tập xác định: R.

 là tam thức bậc hai có biệt số 

+ Pt: có 3 nghiệm phân biệt nên có 2 nghiệm phân biệt  và



+ Suy ra:  (là hai nghiệm của phương trình ).

+ Thực hiện phép chia đa thức ta được:



Suy ra 

+ 

+ Vì là 2 nghiệm của phương trình: nên

Do đó: .

suy ra: 

+ Vì  và  nên 

1. Cho phương trình: .

a/ Giải phương trình khi 

b/ Tìm  để phương trình có nghiệm.

**Hướng dẫn giải**

**Câu a**:

+Đặt u =  v = .

+Ta có hệ 

+Hàm số  có  nên f(u) tăng trên [1; + ∞).

+  và  tăng nên hệ (I) chỉ có một nghiệm:  từ đó ta có nghiệm của phương trình là: .

**Câu b**:

+ ) tăng trên [1; + ∞) mà  nên phương trình có nghiệm khi  hay 

1. Giải và biện luận phương trình theo tham số m: 

**Hướng dẫn giải**

(1).

+Điều kiện: 

Đặt  Phương trình trở thành: .

Xét tam thức bậc hai  có: 

+Trường hợp 1: t = 0 là nghiệm của (2).Khi đó ta có m = .

+ m = : (2) nên (1) ⇔ lgcosx = 0 ⇔ cosx = 1⇔x =2kπ, k∈Z.

+ m =-: (2)  nên (1)

⇔ 

+Trường hợp 2: Phương trình (2) có 2 nghiệm t1, t2 khác 0 (t1 ≤ t2):

.

Với điều kiện (1) có nghiệm nên ta chỉ cần xét 2 trường hợp sau: a/; b/ 

a/ .

Khi đó (2) có hai nghiệm t1, t2 âm nên (1) có các họ nghiệm:.

b/ 

Khi đó (1) ⇔  .

+Kết quả:

+ : (1) có nghiệm: .

+ : (1) có nghiệm: 

+ : (1) có nghiệm: 

+ (1) có nghiệm .

+ : (1) vô nghiệm.

+ : (1) có nghiệm 

+ : (1) có nghiệm: .

**BÀI TẬP CHƯA CÓ LỜI GIẢI**

1. Giải phương trình: .

2. Giải phương trình: 

3. Cho trước các số nguyên dương  Chứng minh rằng phương trình

 có vô số nghiệm nguyên dương.

4. Giải phương trình: . Trong đó a là tham số.

5. Giải phương trình: 

6. Giải các phương trình sau:

a)  ; b) .

c) 

7. Giải phương trình: 

**2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH**

# **1. Không có tham số**

## **Dạng 1: Biến đổi tương đương**

1. Giải bất phương trình: .

**(Chưa giải)**

1. Giải bất phương trình: **

**Lời giải**

Điều kiện: **

\*) Nếu ** thì ** suy ra bất phương trình vô nghiệm.

\*) Nếu **nên bất phương trình tương đương với

**

**

Vậy tập nghiệm là **

1. Giải bất phương trình: 

**Hướng dẫn giải**

Điều kiện: 



 (do )



+) Với  thì (\*) luôn đúng.

+) Với , bình phương 2 vế của (\*) suy ra vô nghiệm.

Vậy, bất phương trình có nghiệm .

1. Giải bất phương trình: .

**Hướng dẫn giải**

+) Điều kiện: 

+) Với *x*=1 BPT hiển nhiên đúng suy ra *x*=1 là nghiệm

+) Với  suy ra BPT  chỉ ra vô nghiệm

+) Với  suy ra BPT .

Chỉ ra nghiệm 

+) Kết luận: BPT có nghiệm 

1. Giải bất phương trình sau: 

**Hướng dẫn giải**

Điều kiện .

Với 

suy ra 

do đóvà.

Kết luận tập nghiệm .

## **Dạng 2: Đặt ẩn phụ**

1. Giải bất phương trình: 

**(Chưa giải)**

1. Giải bất phương trình: 

**Hướng dẫn giải.**

Điều kiện x ≥ .

Biến đổi bất phương trình về dạng: 

Đặt:  Khi đó, bất phương trình có dạng:  (1)

Ta có: 

Dấu đẳng thức xảy ra khi 

Vậy 

Xét trường hợp , ta có: 

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: .

1. Giải phương trình: .

## **Dạng 3: Sử dụng hàm số**

1. Chứng minh rằng:  với x > 0 và y > 0.

* Đặt t = 
* Vì x > 0 và y > 0 nên: t = 
* Do đó: .
* Bài toán trở thành chứng minh:  với mọi t > 1.
* Xét hàm số y = f(t) =  với mọi t > 1.
* y’ =  nên hàm số đồng biến trên khoảng (0; +∞).
* Do đó: t > 1 ⇒ f(t) > f(1) = 0 ⇒ >0.
* Cách giải khác: Đặt t =  và đưa đến chứng minh: . Giải tương tự.

1. Giải bpt  (1).

* (1đ) Biến đổi về dạng: ay + by ≥ 1: Chia hai vế của (1) cho (1 + x2)cos4x + 3 > 0 ta được:

1. ⇔  (2).
   * (4 đ) Tìm ra nghiệm của (1):
   * Vì 0< x < 1 nên:  và 
   * Và cos4x + 3 ≥ 2 nên: .
   * Dấu bằng xảy ra khi chỉ khi: cos4x + 3 = 2 ⇔ cos4x = -1 ⇔ x =  (vì 0< x <1).

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất: x = .

Cách khác: Đặt x = tgt, t ∈ nên 0< x <1 ⇔ 0 < t < .

(2) ⇔ (sin2t)cos4x + 3 + (cos2t)cos4x + 3 ≥ 1.

## **Dạng 4: Đánh giá**

1. [Đề chọn HSG Sở Quảng Trị,2010] Giải bất phương trình : .

# **2. Có tham số**

1. Tìm  để bất phương trình sau có nghiệm duy nhất:

.

**Hướng dẫn giải.**

Điều kiện:  và 

Bất phương trình đã cho tương đương với:

. (\*)

Đặt  

+ Với  (\*) 

Ta thấy  và  là hàm đồng biến nên ta có:



Vì phương trình trên có  với  nên phương trình trên vô nghiệm ⇒ bất phương trình đã cho vô nghiệm.

+ Với  Ta có: 

.

Xét phương trình  có 

Nếu   ⇒ (2) vô nghiệm ⇒ bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Nếu  phương trình trên có 2 nghiệm đều thoả mãn (1) và (2) ⇒ bất phương trình đã cho có nhiều hơn một nghiệm.

Nếu  ⇒ (2) có nghiệm duy nhất  ⇒ bất phương trình đã cho có nghiệm duy nhất 

Vậy giá trị cần tìm của m là: 

1. Tìm m để bất phương trình  đúng với mọi x .
2. *[Đề hsg Dương Xá,2008-2009]* Cho bất phương trình:



Xác định m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi .

**Lời giải**

Điều kiện 

Điều kiện cần để bpt (1) nghiệm đúng với thì (2) nghiệm đúng

Xét f(x)= x2-4x-3

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên (2) đúng với 

PT  

Đặt 

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên suy ra 

Bất phương trình trở thành

g(t)=-t2+2t+1m (3)

Để bất phương trình đầu nghiệm đúng với thì (3) có nghiệm đúng với .



Từ BBT suy ra .

Kết luân  thì bpt (1) nghiệm đúng.

III. HỆ PHƯƠNG TRINH

# **1. Không có tham số**

## **Dạng 1: Biến đổi tương đương**

1. Giải hệ phương trình:

**Hướng dẫn giải**

Điều kiện: .

Phương trình (3) .

(vì (1;1) không thỏa phương trình(2))

Thay vào phương trình (2), ta được :

.

Vậy .

1. Giải hệ phương trình sau trên tập số thực: 

**Hướng dẫn giải**

Đặt .

Điều kiện: 



Thay vào (2) ta được: 

Phương trình (\*) vô nghiệm do: .

Vậy x = 3 và y = 1 là nghiệm của hệ phương trình.

1. Giải hệ phương trình: 
2. Giải hệ phương trình: .
3. Giải hệ phương trình:  

**Lời giải**

Điều kiện: .

- Ta có  (1).

Xét hàm số , suy ra hàm số g(t) đồng biến trên khoảng . Kết hợp với (1) ta có



- Thế (2) vào phương trình còn lại của hệ đã cho ta được:



Xét hàm số



Suy ra hàm số  nghịch biến trên khoảng , từ đó phương trình ( 3) có nghiệm duy nhất, suy ra .

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất .

1. Giải hệ phương trình: 

Điều kiện : 



Thế vào pt đầu ta được





1. Giải hpt 

Điều kiện x ≥ 

Từ phương trình thứ nhất dễ dàng suy ra được y > 0.

Ta có 

Thay vào phương trình thứ hai ta được



Đặt t =  ta được t4 – 3t – 10 = 0 ⇔ t = 2

Từ đó tìm được 

1. Tìm tất cả các số thực thỏa hệ:.

**Hướng dẫn giải**

Ta chứng minh nếu các số thỏa mãn hai điều kiện đầu thì



Thay ,ta chứng minh

 với 

Ta có 



Do đó nghịch biến trên hơn nữa nên nhận giá trị dương trên và âm trên Suy ra với mọi 

Từ đó,hệ phương trình có nghiệm 

1. Giải hệ phương trình sau:

Hướng dẫn giải











1. Giải hệ phương trình 

**Hướng dẫn giải**

ĐK:

Từ (2) suy ra: 

Do y0 phương trình (1) tương đương với

.Đặt 

\* Xét:phương trình (1')trở thành:.

Nhân liên hợp của mẫu số đưa về phương trình: được nghiệm 

+  suy ra  không thoả mãn  loại.

+  .Thế vào (2') được 

\* Xét:phương trình trở thành:.Phương trình này có nghiệm u=0 suy ra x=0 (Không thoả mãn điều kiện bài toán).

Vậy hệ đã cho có một nghiệm 

1. Giải hệ phương trình : .

**Hướng dẫn giải**

Ta có:



Thế vào (2) ta có :







Vậy nghiệm của hệ PT là:  và .

1. Giải hệ phương trình: 

**Hướng dẫn giải**

Điều kiện : .



Thế vào pt đầu ta được :





1. Giải hệ phương trình: 

**(Chưa giải)**

1. Giải hệ phương trình: 

**(Chưa giải)**

1. Giải hệ phương trình:

**(Chưa giải)**

1. Giải hệ phương trình: 

**(Chưa giải)**

1. Giải các hệ phương trình

a) b) 

**(Chưa giải)**

1. Giải các hệ phương trình: 

a)  b)  c) 

**(Chưa giải)**

1. (Trại hè Hùng Vương 2013) Giải hệ phương trình 

**Hướng dẫn giải**

Từ phương trình đầu của hệ ta có





Coi (\*) là phương trình bậc 2 ẩn y ta có  nên (\*) vô nghiệm.

Do đó hệ phương trình tương đương với





Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ là 

1. (Thi cụm Quỳnh Lưu, năm 2016-2017) Giải hệ phương trình sau:



**Hướng dẫn giải**

Điều kiện: 

(1) .

Thay vào (2) ta có phương trình 

Xét  thỏa mãn (3), suy ra 

Xét : (3)



Kết hợp (3) và (4) ta được 

Kết luận: Hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm: 

## **Dạng 2: Đặt ẩn phụ**

1. Giải hệ phương trình: 

**Hướng dẫn giải**

Điều kiện: . Đặt  với 

HPT ⇔ ⇔  ⇔ 

⇔ ⇔⇔  ⇔  (thỏa).

Kết luận: nghiệm hệ phương trình là .

1. Giải hệ phương trình: 

Ta thấy y = 0 không là nghiệm của hệ phương trình đã cho,

ta xét các giá trị , chia hai vế của PT thứ nhất cho  ta được



Đặt  ta có hệ phương trình



Với  ta có  (\*)

Giải hệ PT (\*) ta được hai nghiệm (-2; 5) , (1; 2)

Vậy hệ PT ban đầu có hai nghiệm (-2; 5) , (1; 2)

1. Hệ phương trình tương đương với 

+ Với y = -2 thì hệ phương trình vô nghiệm

+ Với , chia hai vế của hai phương trình cho y + 2 ta có



Đặt 

Khi đó ta có hệ phương trình 

Do đó 

Kết hợp với điều kiện thì hệ phương trình có hai nghiệm (x; y): (1; -1), (-2; 2)

1. Giải hệ phương trình: 

Điều kiện . Viết lại hệ dưới dạng: 

Đặt 

Hệ phương trình trở thành :

hay 

.

Kết hợp điều kiện (\*) ta được nghiệm của hệ là:

1. Giải hệ phương trình sau:



**Hướng dẫn giải**

Đặt  













Xét  với 



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| t | - ∞ -2   2 +∞ | | |
| f’(t) | + | + 0 - 0 + | + |
| f(t) | -11 |  | +∞  1 |

.

 vô nghiệm .

.

 , đk:  .

Ta có :  .





Do (t/m).

1. Giải hệ phương trình :

**Hướng dẫn giải**

+) Đặt 

+) Đưa về hệ: 



Giải hệ (I) ta được    
Hệ (II) vô nghiệm

Vậy hệ có nghiệm  .

1. *[Đề xuất, Chyên Lào Cai, DHDDBBB, 2015]* Giải hệ phương trình:



**Lời giải**

Hệ phương trình tương đương với 

+ Với y = -2 thì hệ phương trình vô nghiệm

+ Với , chia hai vế của hai phương trình cho y + 2 ta có



Đặt 

Khi đó ta có hệ phương trình 

Do đó 

Kết hợp với điều kiện thì hệ phương trình có hai nghiệm (x; y): (1; -1), (-2; 2)

1. *[Đề thi hsg Ngô Gia Tự, Vp, 2012-2013]* Giải hệ phương trình: 

Lời giải

Đặt : khi đó ta có hpt : .

1. *[Đề xuất, Chuyên Thái Bình, DHĐBBB,2015]* Giải hệ phương trình sau:



**Lời giải**

ĐKXĐ: 

Từ (1) ta được: 

Trường hợp đầu suy ra x=y=0 nhưng ko là nghiệm của hệ2

Do vậy ta được: x2 = y + 1 **(1 điểm).**

Thay vào phương trình (2) ta được:



Thay 

Dễ thấy  nên trường hợp thứ ba bị loại.

Hai trường hợp đầu ta tính được x=-1/2

KL: Hệ có một nghiệm x=-1/2; y=-3/4

1. Giải hệ phương trình sau:

 ; 

**Hướng dẫn giải**

Điều kiện:.

Đặt  ().Hệ phương trình đã cho trở thành



Nhận xét:; .Do đó  là một nghiệm của hệ.

Bây giờ ta xét .Đặt .Với cách đặt này thì

Phương trình (1)trở thành:

 (3)

Phương trình (2)trở thành:

 (4)

Thay (3)vào (4)ta được: (5)

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz cho vế trái của (5)ta được:





Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi .Khi đó  hay .

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm  là .

1. Giải hệ phương trình sau:

**Hướng dẫn giải**

+ Điều kiện:

+ Trừ vế với vế hai phương trình của hệ ta được:



Chia cả hai vế của PT cho ,ta được:

+ Đặt  ta có phương trình:







Với  thì 

Với suy ra  thay vào PT (1):

Kết luận:Nghiệm của hệ phương trình là:

1. Giải hệ phương trình:.

**Hướng dẫn giải**

Giải hệ phương trình:

Vì  không thỏa hệ pt nên 

Đặt  thì .

Từ (2):

Vậy .Thay vào (3):

Vậy .

Vì nên .

Vậy .

Vì nên .

Vậy hệ có nghiệm: trong đó

1. Giải hệ phương trình: 

**(Chưa giải)**

1. (Chuyên Vĩnh Phúc 2010 – 2011) Giải hệ phương trình: 

**Hướng dẫn giải**

+) Nếu  thay vào hệ ta có hệ vô nghiệm

+) Nếu  ta đặt  thay vào hệ ta được





+) Nếu  thay vào (1) không thỏa mãn

+) Nếu  thay  vào (1) không thỏa mãn, thay  vào (1) ta có . Do đó nghiệm của hệ là 

1. **(Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình, năm 2013)** Giải hệ phương trình sau:



**Hướng dẫn giải**

Điều kiện ; ; 

Từ phương trình thứ nhất suy ra  và  cùng dấu mà  nên . Ta có

 từ phương trình thứ nhất suy ra  không thỏa mãn pt thứ 2 nên 



Thay vào phương trình thứ hai ta được 

Đặt  ta được .Từ đó tìm được 

1. Giải hệ phương trình 
2. Tìm  để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất



**Hướng dẫn giải:**

(I) 

\* Đặt . Ta có (II)

Nhận xét : Hệ (I) có nghiệm duy nhất  hệ (II) có nghiệm duy nhất

\* Điều kiện cần : Giả sử hệ (II) có nghiệm duy nhất 

Vì  là nghiệm của (II) nên  cũng là nghiệm của (II)

Do đó để (II) có nghiệm duy nhất thì 

Với  ta có : 

\* Điều kiện đủ :

Với . Ta có 

\* Vì , Dấu = xảy ra nên  ( Thỏa mãn (2 ))

Do đó hệ (II) có nghiệm duy nhất .

\* Vậy hệ (I) có nghiệm duy nhất hệ (II) có nghiệm duy nhất .

1. Giải hệ phương trình sau:

**Hướng dẫn giải:**

Ta có: 

+) Điều kiện : 

+ Trừ vế với vế hai phương trình của hệ ta có:



Chia cả hai vế của PT cho , ta có: 

+ Đặt  ta có phương trình:



Với  thì 

Với  suy ra  thay vào PT (1): 

Kết luận: Nghiệm của hệ phương trình là: 

1. Giải hệ phương trình sau: 

**Hướng dẫn giải:**

ĐKXĐ: 

Từ (1) ta được: 

Trường hợp đầu suy ra  nhưng ko là nghiệm của hệ2

Do vậy ta được: 

Thay vào phương trình (2) ta được:  (\*)

Đặt 

Thay vào (\*) ta được 

Dễ thấy  nên trường hợp thứ ba bị loại.

Hai trường hợp đầu ta tính được 

KL: Hệ có một nghiệm .

1. Giải hệ: 

**Hướng dẫn giải:**

Điều kiện: 



Kết hợp với (1) ta được: 

Cộng (3) và (4) ta được y = -x, thế vào (2) ta được: 

Đặt , phương trình (5) trở thành







Với  ta được 

Vậy hệ phương trình có nghiệm (x,y) = **;** (x,y) = (1;-1)

## **Dạng 3: Sử dụng hàm số**

1. Giải hệ phương trình sau trên tập số thực: .

**Hướng dẫn giải**

Đặt .



 với .

.

Suy ra f(t) đồng biến trên . Do đó: 

Thế  vào phương trình (3) ta được: 

.

Đặt .

Phương trình trở thành: 

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm: .

1. Giải hệ phương trình



**Hướng dẫn giải**

Điều kiện: .

Xét các hàm số  trên .

Khi đó ta có .

Mà  là các hàm số liên tục trên  suy ra  đồng biến trên  và  nghịch biến trên .

Không mất tính tổng quát ta giả sử . Khi đó ta có:

Nếu 

suy ra , vô lí vì .

Do vậy , tương tự lí luận như trên ta được  suy ra .

Thay trở lại hệ ta được  (1).

Theo trên, bên trái là hàm đồng biến, bên phải là hàm nghịch biến, nên phương trình có nhiều nhất 1 nghiệm

Mà  là nghiệm nên nó là nghiệm duy nhất của phương trình (1).

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là 

1. Giải hệ phương trình : 

**Hướng dẫn giải**

Ta có : .

Hàm số f(x) = x3 + x là hàm số đồng biến trên R nên phương trình f(x) = f(y - 1) ⇔ x = y – 1.

Do đó .

Ta có .

Vậy hệ có 2 nghiệm : .

1. Giải hệ phương trình:



**Lời giải.**

Phương trình (2) .

Xét hàm số ,

ta có:  do đó hàm số  đồng biến trên .

từ (2) ta suy ra . Vây 

Thay  vào (1) ta được: 



 (3)

Xét hàm số: , (a>0)



Vậy hàm  là hàm đồng biến trên khoảng (0, ), do đó:

Kết hợp điều kiện ta nhận được  suy ra 

Vậy hệ phương trình có nghiệm 

1. Giải hbpt  (x > 3).

* (2 đ) Đặt y = 2004. Do x > 0, y > 0 nên ta được:

1. ⇔ x2y + xy > y2x + yx ⇔ x2y – y2x + xy – yx >0 ⇔ (xy – yx)(xy + yx + 1) > 0

⇔ xy – yx > 0 ⇔ xy > yx ( do xy + yx + 1 > 0).

* + (1.5 đ) xy > yx ⇔ ln(xy) > ln(yx) ⇔ ylnx > xlny ⇔ . Vậy:  (3).

Biến đổi tương tự, bất phương trình (2) trở thành:  (4).

Từ (3) và (4), hệ đã cho trở thành:  (5).

* + (1.5 đ) Xét hàm số: y = f(x) = , y’=<0, ∀x > 3.

Nên hàm số nghịch biến trên khoảng ( 3; +∞), do đó:  tương đương với

2003 < x < 2004.

1. Giải hệ phương trình: 

Giải:

Ta có



Thế vào 



Xét  trên 



đồng biến trên 

Từ  và 



1. Giải hệ phương trình .

**(Chuyên Bắc Giang)**

**Lời giải**

Điều kiện xác định: .

Phương trình  tương đương với phương trình:



Thế  vào  ta được:











.

Ta có hai trường hợp:

\* TH 1: Nếu  thì .

Thử lại vào hệ phương trình ban đầu thấy thỏa mãn.

\* TH 2: Nếu  thì ta có phương trình



 (vô nghiệm).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là .

1. Giải hệ phương trình: 

**Hướng dẫn giải**



(1)  

ĐK: (2x + 1)(y + 1)  0 Mà x > 0 

(1)   

Thay vào (2):   (3)

Hàm số f(t) = t3 + t đồng biến trên R

(3)  

NX: x >1 không là nghiệm của phương trình

Xét 01: Đặt x = cos với  Ta có:   (k) Do  

Vậy hệ có nghiệm 

1. *[Đề xuất Chuyên Biên Hòa, DHĐBBB 2014-2015] (4,0 điểm):*

Giải hệ phương trình sau trên tập số thực



**Lời giải**

Điều kiện

Đặt

Phương trình (2) tương đương với

Ta có đồng biến trên nên

Suy ra

Xét phương trình (1) tương đương với

Xét ta có hàm số g(x) đồng biến.

Xét ta có hàm số g(y+1) nghịch biến

Ta có nên

nên

Mặt khác g(x) liên tục trên (0 ; + nên

Khi đó

Vậy hệ có nghiệm duy nhất ( 2 ; 3)

1. *[Đề dữ liệu, Chuyên Lê Hồng Phong, DHĐBBB, 2015]* Giải hệ phương trình:



**Lời giải**

Điều kiện:  Ta có 

Đặt  ta có phương trình  (\*)

Xét hàm số  với 

Ta có 

Nên hàm số  nghịch biến trên 

Mà  suy ra phương trình (\*) có nghiệm duy nhất 

Với  ta có 



Xét hàm số  với  ta có 

 đồng biến trên 

Do đó phương trình  có dạng



Với  ta có  (thỏa mãn điều kiện )

Vậy hệ có nghiệm 

1. Giải hệ phương trình:

**Hướng dẫn giải**

+ ĐK:

+ Biến đổi  được:



+ Thế vào  ta được:

Áp dụng BĐT Cauchy ta được:

▪ 

▪ 

Suy ra .Dấu  xảy ra khi và chỉ khi 

Vậy nghiệm  cần tìm là 

1. Giải hệ phương trình sau:



**Hướng dẫn giải**

(1) 

Xét hàm số  trên ; 

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  | + 0 - |
|  |  |

Từ bảng biến thiên, ta có 

Do đó 

Thế vào phương trình (2) ta được:

 (4)

Điều kiện xác định của (4) là:  Với đk (\*), ta có:



 (tm (\*)) ( Vì 

Với  (thỏa mãn điều kiện).

Vậy hệ có nghiệm duy nhất 

1. Giải hệ phương trình : 

**Hướng dẫn giải**

Ta có : .

Hàm số f(x) = x3 + x là hàm số đồng biến trên R nên phương trình f(x) = f(y - 1) ⇔ x = y – 1.

Do đó 

Ta có 

Vậy hệ có 2 nghiệm : 

1. Giải hệ phương trình :

**Hướng dẫn giải**

+) y = 0 không thỏa mãn

+) y ≠ 0, hệ pt ⇔ 

Đặt *t* =, hệ phương trình trở thành 

+) Từ hai phương trình trên suy ra

*x*3 + 3*x*2 + *6x* + 4 = *t*3 +3*t* ⇔ (*x +*1)3 + 3(*x* +1) = *t*3 +3*t* (3)

Xét hàm f(t) = *t*3 +3*t*  đồng biến trên . Phương trình (3) tương đương *x+* 1 *= t*.

Thay vào phương trình (2) và giải phương trình được *x* = 1, y =  .

Nghiệm của hpt là (1;  ).

1. (Olimpic Trại hè Hùng Vương 2013) Giải hệ phương trình : 

**Hướng dẫn giải**

**Hệ phương trình :** 

Ta có : 



Tương tự : 



Ta có : 

Xét hàm số  với, ta có :  nên hàm số f(x) đồng biến trên , suy ra 

Xét hàm số  với, ta có :  nên hàm số g(y) đồng biến trên , suy ra 

Suy ra : 

Do đó phương trình 

Vì  không thoả mãn phương trình thứ 2 của hệ nên hệ đã cho vô nghiệm .

1. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành – Yên Bái)** Giải hệ phương trình:



**Hướng dẫn giải**

Điều kiện 



Xét hàm số  liên tục trên có



Suy ra f(t) là hàm số đồng biến trên 

Khi đó 

Thay y vào phương trình đầu ta được



Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là 

1. (Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình - 2012) Giải hệ phương trình:



**Hướng dẫn giải**

Trừ vế với vế của 2 phương trình (1), (2) ta có:





Đưa về xét hàm số:  có



 là hàm số đồng biến trên R, lại có

,





1. ***(Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm – Quảng Nam 2014)*** Giải hệ phương trình sau :



**Hướng dẫn giải**

▪ Điều kiện :  (\*)

▪ Với điều kiện (\*), phương trình (1) tương đương : (3)

Xét hàm số : 



 liên tục , suy ra  là hàm số luôn đồng biến trên 

Khi đó : pt(3) 

▪ Thay  vào phương trình (2), ta được :

 với 









; vì : 

Với  suy ra 

Với  suy ra 

Thử lại ta thấy cả hai đều thỏa điều kiện (\*)

▪ Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm :  , 

1. Giải hệ phương trình 

**Hướng dẫn giải**

Đặt 

Ta có: 

Từ đó suy ra hệ phương trình có bốn nghiệm



1. Giải hệ phương trình:
2. Giải hệ phương trình
3. Giải hệ phương trình sau trên R: 

**Hướng dẫn giải:**

Cộng hai phương trình vế theo vế thu được phương trình 

Xét hàm số  với 

Ta có  nên hàm số đồng biến

nên từ 

từ đó thay vào giải ra được  hoặc .

1. Tìm tất cả các số thực  thỏa hệ: .

**Hướng dẫn giải:**

Ta chứng minh nếu các số thỏa mãn hai điều kiện đầu thì



Thay , ta chứng minh: với 

Ta có 



Do đó nghịch biến trên hơn nữa nên nhận giá trị dương trên và âm trên Suy ra với mọi 

Từ đó, hệ phương trình có nghiệm 

1. Giải hệ phương trình sau: 

**Hướng dẫn giải:**

+)  không thỏa mãn hệ.

+) Xét , hệ tương đương 

Cộng vế với vế ta được 

Xét hàm số: 

Do đó  là hàm số đồng biến trên , suy ra 

Thế vào (1), kết hợp , ta được 

Do đó  là nghiệm của hệ.

1. Giải hệ phương trình: 

**Hướng dẫn giải:**

Điều kiện: 

Ta biến đổi phương trình thứ hai tương đương với:



Nhận thấy hàm số  đồng biến trên khoảng 

nên ta có 

Thế vào phương trình đầu ta có cặp nghiệm duy nhất của hệ phương trình là  và 

## **Dạng 4: Đánh giá**

1. Giải hệ phương trình sau:

**Hướng dẫn giải**

Nhận thấy  là một nghiệm của phương trình. Ta chứng minh hệ có nghiệm duy nhất.

Giả sử (\*) khi đó



Với  ta có



Với  ta có



Suy ra  mâu thuẫn (\*).

Tương tự giả sử  ta cũng dẫn đến điều vô lý.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất .

1. Giải hệ phương trình 

**Hướng dẫn giải**

Điều kiện .

Nếu hoặc y = 0 thì hệ vô nghiệm.

Nếu (x,y không đồng thời bằng 0) thì vế trái của (2) âm, phương trình (2) không thoả mãn.

Do đó x > 0, y > 0.

Vì nên từ phương trình (1) suy ra



Mặt khác, ta có . (4)

Ta chứng minh rằng: .

Thật vậy bất đẳng thức (5) tương đương



 (6)

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:





Cộng vế với vế hai đẳng thức trên ta được (5), từ đó suy ra (5)

Từ (4) và (5) suy ra: 

Kết hợp với phương trình (2) và lưu ý rằng , ta được:

(7)

Từ (3) và (7) suy ra 2x + y = 3 và x = y ta được x = y = 1 (thoả mãn các điều kiện của bài toán). Vậy hệ có nghiệm duy nhất là (1;1).

1. Giải hệ phương trình sau: 

**Lời giải.**

ĐK:  Đặt 



Nhận xét: từ (2) ta có: 

Ta có: 

Do đó, từ (1) suy ra: 

Ta có: 

Do đó, từ (2) suy ra: 

Từ (3) và (4) suy ra:  .

Thay vào hệ ta có:



Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất: 

1. Giải hệ phương trình: 

**Lời giải**

+) Nếu  thay vào hệ ta có hệ vô nghiệm.

+) Nếu  ta đặt  thay vào hệ ta được





+) Nếu  thay vào (1) không thỏa mãn

+) Nếu  thay  vào (1) không thỏa mãn, thay  vào (1) ta có . Do đó nghiệm của hệ là 

1. Giải hệ phương trình sau:



**Lời giải**

Đặt , phương trình (1) trở thành:

(Sử dụng tính chất đơn điệu)



Thế (3) vào (2) ta được:



Đặt  Phương trình (4) trở thành:

 (5)

Áp dụng bđt AM – GM ta có: 

Từ (5) ta có: 

Từ đó . Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất 

1. Giải hệ phương trình :

 ()

**Lời giải**

Đặt : 

Ta có : ,suy ra : 

Xét vế trái của phương trình (2)  

 , suy ra 

là hàm số đồng biến trên (1;2) , suy ra :  ,suy ra VT = 

Dấu bằng xẩy ra khi , suy ra :  hoặc .

1. Giải hệ phương trình sau:

 ; 

**Lời giải**

Điều kiện: .

Đặt  (). Hệ phương trình đã cho trở thành



Nhận xét: ; . Do đó  là một nghiệm của hệ.

Bây giờ ta xét . Đặt . Với cách đặt này thì

* Phương trình (1) trở thành:  (3)
* Phương trình (2) trở thành:  (4)

Thay (3) vào (4) ta được:  (5)

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz cho vế trái của (5) ta được:



Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi . Khi đó  hay .

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm  là .

1. Giải hệ phương trình 

**Bài giải**

Điều kiện 

Nếu hoặc y = 0 thì hệ vô nghiệm

Nếu (x,y không đồng thời bằng 0) thì vế trái của (2) âm, phương trình (2) không thoả mãn. Do đó x > 0, y > 0. 1.0 đ

Vì nên từ phương trình (1) suy ra

 1.0 đ

Mặt khác, ta có . (4)

Ta chứng minh rằng: . 1.0 đ

Thật vậy bất đẳng thức (5) tương đương



 (6)

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:





Cộng vế với vế hai đẳng thức trên ta được (5), từ đó suy ra (5)

Từ (4) và (5) suy ra: 

Kết hợp với phương trình (2) và lưu ý rằng , ta được:

(7)

Từ (3) và (7) suy ra 2x + y = 3 và x = y ta được x = y = 1 (thoả mãn các điều kiện của bài toán). Vậy hệ có nghiệm duy nhất là (1;1)

1. Giải hệ phương trình: ().

**Hướng dẫn giải**

Điều kiện: , ; ; .

+) Sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số không âm ta có:

=  

 = 

Suy ra: 3 +   + 

Vì vậy, ta phải có:   .

Vậy phương trình đầu tương đương với x = y.

Thay  vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

 +   (\*).

Do  +   nên ta phải có:    ( do).

Khi đó phương trình (\*) tương đương với:



.

⬄  .

Vậy hệ có nghiệm duy nhất .

1. *[Đề hsg Dương Xá,2008-2009]* Giải hệ phương trình sau:



**Lời giải**

Điều kiện 

Cộng và trừ từng vế tương ứng của hệ phương trình trên ta được



Thế y=8-x vào phương trình trên ta được



  (1)

Trong hệ trục tọa độ xét ; 

Khi đó ||.||=

.=

Pt (1) tương đương với ||.||=.(2)

Ta có ||.||.

Khi đó (2) xảy ra khi và chỉ khi hoặc hoặc (không xảy ra) hoặc cùng hướng  suy ra  x=4.

KL: Nghiệm của hệ là (4;4)

1. *[Đề chọn hsg tỉnh Trà Vinh, 2014-2015]* Giải hệ phương trình :

***1/*** 

***2/*** 

1. *[Đề xuất Chuyên Biên Hòa, DHĐBBB 2015-2016]*Giải hệ phương trình



**Lời giải**

Điều kiện : 

Ta có :  ( dấu = xảy ra khi xy =)

Do đó từ (1)  (3) Từ (2) và (3) ta suy ra : 





 (4)

Ta lại có 

Do đó (4)   hoặc  hoặc 

Thử lại ta thấy chỉ có  là nghiệm của hpt.0,5

1. Giải hệ phương trình:

**Hướng dẫn giải**

Đặt 

Hệ trở thành: 

Ta có  với mọi  nên hàm  đồng biến.

Giả sử  thì  hay  suy ra 

Hay

Do  nên từ (\*)ta có 

Lại theo giả sử ở trên, nên .Thế vào hệ phương trình ban đầu ta được

Thử lại thấy  là nghiệm.

Kết luận:Hệ đã cho có nghiệm duy nhất 

1. Giải hệ phương trình :

**(Chưa giải)**

# **2. Có tham số**

1. Tìm m để hpt sau có nghiệm thực:

**Hướng dẫn giải**

Điều kiện: .

Phương trình (4) .

Xét hàm số , với .

.

f(t) là hàm số nghịch biến trên  (vì nó liên tục trên đoạn này).

Suy ra: .

Thay vào phương trình (5) ta được: .

Đặt , . Ta có phương trình: g(u) = 

.

Suy ra hệ phương trình đã cho có nghiệm .

1. Tìm  để hpt có nghiệm 

* 
* Do đó hệ có nghiệm khi chỉ khi phương trình:f(x) = x2 + x – (m + 4) = 0 có nghiệm trong [m;+∞) (\*)
* f(x) = 0 có Δ = 4m + 17 nên f(x) = 0 có nghiệm .
* Do đó: (\*) 
* 

**Một số cách giải khác:**

* Cách 2: 

Hệ (I) có nghiệm ⇔ x2 + x – (m + 4) = 0 có nghiệm trên [-2;2].

Dựa vào đồ thị parabol (P) y = x2 + x – 4 trên [-2;2], và đường thẳng y = m suy ra kết quả.

* Cách 3: Giải theo tam thức bậc hai....

1. Tìm a để hệ phương trình sau có nghiệm .

**Hướng dẫn giải**

Điều kiện .

Hệ phương trình tương đương 

.

Do đó  và  là nghiệm của phương trình



Để hệ trên có nghiệm khi phương trình (\*) có 2 nghiệm không âm

.

Đặt 

1. Tìm *m* để hệ:  có nghiệm.

**Hướng dẫn giải**

+) Đặt 

+) Đưa về hệ: 

+) Điều kiện để hệ (\*\*) có nghiệm 

Ta xét hệ có nghiệm hay ko

Biến đổi hệ (\*\*) trở thành: 

+) Xét hệ (I): *u*=*v* ta được 2*v*2+*v*+2-*m*=0 có  với  PT luôn có nghiệm hệ có nghiệm *u*=*v*=*v*0 suy ra hệ ban đầu có *x*=*y*=*v*o2+1

+) Xét hệ (II): ……….

1. Tìm tham số  để hệ sau có nghiệm:.

**Lời giải**





Do (2)nên  và  là hai số dương,áp dụng bất đẳng thức Cô – si cho 4 số dương ta được:



Do đó (1)chỉ đúng khi dấu đẳng thức xảy ra tại (3)tức là:

Vậy hệ có nghiệm khi và chỉ khi  và nghiệm của hệ là:

1. Tìm giá trị lớn nhất của tham số m để cho hệ phương trình sau có nghiệm:



**Hướng dẫn giải**

+ Đặt:

Ta đ ược:;  ; .

Do đó ta có hệ .

+ Chú ý:

Do đó:Hệ đã cho có nghiệm thì:



Suy ra:.

+ Xét .Ta có hệ:

Từ (1)có thể đặt ,thay vào (2)và (3)ta có:.

Do đó ta có hệ:với .

+ Từ đó:Đáp số của bài toán là 

1. a/ Tìm  sao cho hệ  có nghiệm.

b/ Với p tìm được ở câu a/, hãy xác định tập hợp tất cả các giá trị của tổng:  với ai > 0 và .

**Hướng dẫn giải**

**Câu a**

Do:.

 Khi đó:.Vậy hệ có nghiệm.

 Chọn  và  có nghiệm.Nên  là nghiệm của hệ.

 có nghiệm.Nên là nghiệm của hệ.

Vô nghiệm.

Vậy hệ có nghiệm khi 

**Câu b**

Ta có:.

Xét hàm: Ta có:.

Do đó: Dấu đẳng thức xảy ra khi:

 vì .Dấu đẳng thức xảy ra khi , liên tục trên (0;1).Khi  thì .Vậy ,tập giá trị là:

 Chọn .Thỏa giả thiết:

 liên tục trên ; .Vậy tập giá trị là:.

 Chọn thỏa giả thiết: với ;  liên tục trên  ; .Tập giá trị là: .

1. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ sau có nghiệm thực:



**(Chưa giải)**

1. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

.

**(Chưa giải)**

1. (THPT Quảng Xương 2 – Thanh Hóa, 2009-2010) Tìm các giá trị của  để hệ phương trình sau có nghiệm  sao cho 



**Hướng dẫn giải**

Đặt  hệ trở thành 

Từ hệ suy ra  khi đó  là nghiệm của phương trình:

.

Do  nên .

Bài toán trở thành tìm  để phương trình (\*) có hai nghiệm lớn hơn hoặc bằng.

Đặt  phương trình (\*) trở thành: .

Để pt (\*) có hai nghiệm lớn hơn hoặc bằng 2 pt (\*\*) có hai nghiệm không âm

Giải được: .

1. Tìm giá trị của tham số a để hệ phương trình sau có đúng 1 nghiệm:

