**CHUYÊN ĐỀ GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI 3.1. TÍNH GIỚI HẠN BẰNG ĐỊNH NGHĨA.**

1. Cho dãy số  xác định bởi : . Chứng minh rằng với mọi số thực  thì dãy  hội tụ. Tùy theo , hãy tìm giới hạn của dãy .

**Hướng dẫn giải**

Nếu  thì  (do bất đẳng thức AM-GM).

Nếu  thì  (do bất đẳng thức AM-GM) nên .

Nếu  thì . Ta chứng minh: .

Hiển nhiên .

Giả sử .

Vậy .

. Nếu  thì . Ta chứng minh .

Rõ ràng..

Giả sử . Ta chứng minh .

( đúng).

Ta chứng minh  là dãy giảm, thật vậy :.

.

( do tử âm, mẫu dương vì.

.

Mà ).

 giảm và bị chặn dưới ⇒  có giới hạn là*.*

.

Vậy .

. Nếu  thì . Tương tự, ta có:.

.

nên  tăng. Hơn nữa  bị chặn trên bởi, thật vậy.

.

Vậy  tăng và bị chặn trên ⇒  có giới hạn là*.*

.

Vậy .

Tóm lại: + Nếu  thì .

+ Nếu  thì .

+ Nếu  thì .

1. Cho dãy số được xác định bởi . Tìm giới hạn của dãy  khi  với là số thực cho trước.

**Hướng dẫn giải**

Dễ dàng chứng minh được  bằng qui nạp.

Ta có.

.

Bởi vậy  thì .

.

Với, đặt  trong đó .

, với  (1), suy ra.

. khi .

Áp dụng định lý trung bình Cesaro cho dãy với .

ta có  2 suy ra  .

Mà suy ra.

Thật vậy ta có thể chứng minh trực tiếp như sau (chứng minh định lý trung bình Cesaro).

Xét dãy  với .

 nên tồn tại  sao cho .

Gọi với .

Với  ở trên tồn tại  thì  hay .

Xét . ta có.

 o đó theo định nghĩa .

. suy ra.

Nếu  thì .

Nếu  thì .

Nếu  thì  khi .

1. Cho hai số  với .Lập hai dãy số ,  với .Theo quy tắc sau: giải nghĩa cái đó là:.,. Tính:và .

**Hướng dẫn giải**

Tính  với ta có thể chọn sao cho: ,.

Suy ra .

.

.

Bằng quy nạp, chứng minh được:.

.

Nhân hai vế của (1) và (2) cho và áp dụng công thức  được:.

.

Tính giới hạn:.

.

1. Cho dãy số  và.Chứng minh:.

**Hướng dẫn giải**

.

Vậy .

.

Suyra:.

Suyra:.

Vậy:.

Suyra:.

Dođó:.

1. Cho hai số  với , . Lập hai dãy số  với  theo quy tắc sau:.,. Tính:và.

**Hướng dẫn giải**

+Tính :.

.

.

+ Bằng quy nạp, chứng minh được:.

.

+Nhân hai vế của (1) và (2) chovà áp dụng công thức  được:.

.

+Tính giới hạn:.

.

1. Cho dãy số  biết:*.*

.

Hãy tính.

**Hướng dẫn giải**

Ta có:,.

 .

 là dãy số giảm và bị chặn dưới bởi .

.

Từ  cho  ta được:.

 Vậy.

Đặt  .

Ta có  Áp dụng định lí trung bình Cesaro ta có:.

.

.

Mà;.

.

1. Cho dãyxác định bởi:.

Ta lập dãyvới.Tính.

**Hướng dẫn giải**

Tacó.

Giả sử .

Tacó.

.

Hay.

Do  nên.

.

.

Ta lại có.

.

.

.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

1. Cho dãy sốxác định bởi

a) Chứng minh:.

.

b) Suy ra tính đơn điệu và bị chặn của.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a) Chứng minh bằng quy nạp toán học.

b) Nhận xét  và hàm số  đồng biến trên.

nên dãy số giảm và bị chặn dưới bởi số .

và bị chặn trên bởi số .

1. Cho dãy sốxác định bởi:.

.

1.Với mỗi ,đặt.Chứng minh dãy số  có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

2.Tìm các số để dãy có giới hạn hữu hạn và giới hạn là một số khác .

**HƯỚNG DẪN GIẢI**

1.Từ giả thiết suy ra *.*

Suy rado đó *.*

Xét*.*

*.*

Suy ra*.*

Ta có .

Áp dụng định lý trung bình Cesaro ta có.

.

Do đó *.*

2.Xét *.*

Từ đó:.

+) Nếu  thì *.*

+)Nếu  thì *.*

+) Nếu  thì *.*

Vậy  là giá trị cần tìm thỏa mãn đề bài.

1. Cho dãy số  thỏa mãn .

Chứng minh rằng dãy số  có giới hạn bằng  khi .

**Hướng dẫn giải**

Từ giả thiết ta có , do đó dãy số  là dãy tăng, vì.

vậy .

,.

. Mà  nên theo định lý kẹp ta có.

.

1. Tìm tất cả các hằng số sao cho mọi dãy số dãy số thỏa mãn: .

đều hội tụ. Với giá trị  tìm được hãy tính giới hạn của dãy .

**Hướng dẫn giải**

Ta xét các trường hợp sau.

+ Nếu , thì từ giả thiết, ta có .

Từ đây bằng quy nạp, ta suy ra . Do  nên  khi . Do đó,  không thỏa mãn.

+ Nếu , thì tồn tại  sao cho . Thật vây, lấy  đặt , thì.

.

Chú ý là  Do đó, ta chỉ cần chọn như trên và  thì được 2 bất đẳng thức nêu trên.

Xét dãy số xác định bởi.

.

thì dãy thỏa mãn giả thiết nhưng không hội tụ. Thành thử,  cũng không thỏa mãn.

+ Nếu , thì . Suy ra dãy tăng và bị chặn. Do đó, hội tụ.

Đặt thì từ giả thiết ta có  hay  Vậy .

1. Cho dãy số (xn) thỏa mãn: . Chứng minh dãy số trên có giới hạn.

**Hướng dẫn giải**

\*) Ta chứng minh  với mọi   (1).

Thật vậy:  đúng.

Giả sử (1) đúng với  .

 .

.

 (đpcm).

\*) Ta chứng minh  có giới hạn.

NX:  tăng và  với mọi .

Ta có  với mọi 1.

Vậy  có giới hạn.

1. Cho dãy số  xác định bởi  . Đặt . Tính lim.

**Hướng dẫn giải**

+ Ta có (1).

Từ đó bằng quy nạp ta chứng minh được .

+ Từ (1) suy ra .

Do đó .

+ Ta chứng minh .

Thật vậy, ta có .

Suy ra là dãy tăng, ta có .

Giả sử bị chặn trên và  thì . Khi đó .

( vô lí). Suy ra không bị chặn trên, do đó .

Vậy .

1. Cho dãy số  xác định bởi:*.* Tìm .

**Hướng dẫn giải**

- Vì  nên đặt .

Ta có .

Bằng quy nạp, ta chứng minh được.

.

- Xét.

.

1. Cho dãy số thỏa mãn: . Tính .

**Hướng dẫn giải**

Đặt . Từ giả thiết suy ra .

Với số dương  bé tùy ý, tồn tại số  sao cho với  thì ta có:.

 (1).

- Nếu thì từ (1) dẫn đến .

- Xét trường hợp  hay  cùng dấu, chẳng hạn chúng cùng dương.

. Nếu  thì kết hợp với (1):  dẫn đến .

Mà từ (1) ta có .

. Nếu  thì kết hợp với (1):  dẫn đến .

Tóm lại luôn có , hay .

Vậy .

1. Cho dãy xác định như sau:  và . Với mỗi số nguyên dương , đặt . Tìm .

**Hướng dẫn giải**

Đặt  ta có .

Bằng quy nạp ta chứng minh được .

Xét .

Do đó  là dãy tăng và .

Giả sử  bị chặn trên, suy ra ,. Khi đó ta có  (vô lí), suy ra  không bị chặn trên. Vậy .

Từ (\*) suy ra , hay .

.

Vậy .

1. Cho dãy số  được xác định bởi . Chứng minh rằng dãy có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

Dãy số  được xác định bởi .

Ta chứng minh .

Thật vậy ta có .

Giả sử , khi đó  nên.

.

Do đó theo nguyên lý quy nạp thì .

Xét hàm số  trên khoảng .

Ta có .

Do đó hàm số  đồng biến trên khoảng .

Mặt khác ta có  .

Giả sử  .

.

Do đó  ⇒ Dãy  là dãy giảm và bị chặn dưới bởi 2 nên dãy  có giới hạn hữu hạn.

Giả sử . Từ hệ thức truy hồi  chuyển qua giới hạn ta được:.

.

.

Vậy .

1. Cho dãy số thỏa mãn:  và  (\*).   
   Tìm: .

**Hướng dẫn giải**

\* Ta có: .

Và:   là dãy số tăng.

\* Đặt .

  xác định vì và  .

.

Nên từ giả thiết (\*) ta có:.

.

 (1).

\* Xét dãy số ta có:.

.   tăng.

. Giả sử  có giới hạn là . Từ (1) ta có:.

 (loại).

  tăng và không bị chặn .

\* Ta có:.

.

 .

.

Vậy: .

1. Cho dãy số ; (n = 1; 2;.) được xác định bởi:  Chứng minh dãy số  có giới hạn. Tìm giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

Dự doán giới hạn của dãy số,bằng cách giải phương trình:.

.

Nhận xét .

.

.

Ta dự đoán dãy số  là dãy số giảm và bị chặn dưới bởi 4 tức là .

Chứng minh dãy số  bị chặn: tức là .

khi  vậy  đúng.

Giả sử , ta chứng minh:.

Thật vậy ta có:.

.

Vậy dãy số  bị chặn dưới.

Ta chứng minh dãy số  là dãy số giảm.

Ta có:.

 (vì ).

Vậy dãy số giảm và bị chặn dưới nên có giới hạn.

Đặt  thì .

Ta có:.

.

Vậy .

1. Cho dãy số  được xác định bởi.

.

Với mỗi số nguyên dương n, đặt . Tìm .

**Hướng dẫn giải**

Ta có kết quả sau: với số thực  bất kì, ta có.

.

Do đó  là dãy tăng, giả sử bị chặn trên tức là có giới hạn .

Chuyển qua giới hạn điều kiện (\*) ta có phương trình.

.

phương trình này không có nghiệm hữu hạn lớn hơn 2.

Suy ra dãy  tăng và không bị chặn trên nên .

Ta có .

.

.

.

Suy ra .

Vậy .

1. Cho dãy số  được xác định bởi .

a)Chứng minh rằng  tăng và .

b)Với mỗi số nguyên dương , đặt Tính .

**Hướng dẫn giải**

a)Ta có  Do đó  tăng.

Ta chứng minh bằng quy nạp theo *n* rằng  (1).

Thật vậy, (1) đúng với .Giả sử (1) đúng với  thì.

.

Vậy (1) đúng với mọi *n*. Từ  tăng ngặt và  suy ra .

b)Ta có . Suy ra .

Từ đó .

.

Từ . Vậy .

1. Cho dãy :. Chứng minh dãy  hội tụ và tính .

**Hướng dẫn giải**

Bổ đề 1: .

Bổ đề 2: .

Đặt . Áp dụng bổ đề 1: .

.

Chia các vế cho : .

Cho , và lấy giới hạn, suy ra .

1. Cho dãy số . Tính giới hạn .

**Hướng dẫn giải**

Ta chứng minh quy nạp .

Rõ ràng khẳng định đã đúng với .

Giả sử đã có . Ta chứng minh .

Thật vậy: .

.

Vậy ta có .

1. Cho  và dãy số  với:.

a) Chứng minh:  với .

b)Chứng minh dãy số  có giới hạn và tìm giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

*Ta chứng minh  với bằng quy nạp.*

Ta có:  nên .

Giả sử:  với .

Ta có:  và  nên . Suyra: .

Vậy  với .

*Ta chứng minh*  *là dãy giảm* *bằng quy nạp*.

Vì  nên .Ta có .

Giả sử:. Ta có: 3 và = là hàm nghịch biến nên:.

.

Suy ra:. Vậy  là dãy giảm.

 lả dãy giảm và bị chặn dưới bởi 1 nên hội tụ.

Đặt .Ta có ..

Vậy .

1. Cho dãy số  được xác định: .

Chứng minh rằng dãy số  có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

Ta có .

Chứng minh :  (bằng quy nạp).

\*với  ta có .

\*Giả sử  (với  ).

\*Cần chứng minh : .

Ta có . Suy ra điều phải chứng minh.

Từ đó ta có  với mọi  .

Ta có .

.

Công thức tổng quát : .

Vậy .

1. Cho số thực , xét dãy số với:.

a) Chứng minh rằng:.

b) Chứng minh rằng có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

*a) Chứng minh:*.

đúng với n=1.

Giả sử với . Ta có:.

.

.

Vậy: .

*b) Chứng minh rằng* *có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó*.

Ta chứng minh: là dãy tăng.

.

hay là dãy tăng.(2).

Từ (1),(2) suy ra có giới hạn hữu hạn.Giả sử có giới hạn là .

Ta có:. Vậy .

1. Cho dãy số(un) xác định như sau: .

a) Chứng minh rằng:.

b) Chứng minh rằng có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

a) Với: đúng với n=1.

Giả sử:  với .

Ta có: .

.

. Vậy: .

b)  hay là dãy giảm (2).

Từ (1),(2) suy ra có giới hạn hữu hạn.

Gọi  là giới hạn của ,.

Ta có . Vậy .

1. Cho dãy số  xác định bởi: . Tìm giới hạn sau:.

**Hướng dẫn giải**

Từ đề bài ta có: . Suy ra: .

Ta có: .

Ta có  là dãy đơn điệu tăng và .

Nếu thì .

( vô lí vì  là dãy đơn điệu tăng và ).

Suy ra: .

Kết luận:.

1. Cho dãy số xác định bởi . Chứng minh rằng dãy (*un*) có giới hạn và tính giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

Từ hệ thức truy hồi suy ra .

Bằng quy nạp chứng minh được > 0, với mọi *n.*

Do đó ta có:.

.

Mặt khác ta có :.

.

(*un*) là dãy số giảm và bị chặn dưới bởi , do đó (*un*) có giới hạn hữu hạn.

Đặt .

Ta có : . Vậy .

1. Cho dãy số  xác định bởi: .

a) Chứng minh rằng ;.

b) Với mỗi số nguyên dương , đặt . Tính .

**Hướng dẫn giải**

a) Xét .

Bằng quy nạp chứng minh được .

Xét .

.

Do đó  là dãy tăng và .

Giả sử  bị chặn trên .

Do đó:  (vô lý). Suy ra  không bị chặn trên. Vậy .

b) Từ (\*), suy ra: .

Suy ra: .

Vậy .

1. Cho dãy số . Tìm giới hạn của dãy số  với .

**Hướng dẫn giải**

.

.

Từ đó .

Dễ thấy là dãy tăng và .

Giả sử  bị chặn trên .

Do đó:  (vô lý). Suy ra không bị chặn trên. Vậy .

Vậy .

1. Cho dãy số xác định bởi . Tìm giới hạn của dãy  với .

**Hướng dẫn giải**

 .

Suy ra: .

Dễ thấy là dãy tăng và .

Giả sử  bị chặn trên .

Do đó:  (vô lý). Suy ra không bị chặn trên. Vậy .

Vậy .

1. Cho dãy số  xác định bởi . Đặt .  
   Tìm .

**Hướng dẫn giải**

.

Ta có  .

Dễ thấy:  suy ra là dãy tăng và .

Giả sử  bị chặn trên .

Do đó:  (vô lý). Suy ra không bị chặn trên. Vậy .

Vậy .

1. Cho dãy số (un) xác định bởi: . Đặt Tính: limSn.

**Hướng dẫn giải**

.

.

Bằng quy nạp ta dễ dàng chứng minh được .

Khi đó:  suy ra là dãy tăng và .

Giả sử  bị chặn trên .

Do đó:  (vô lý). Suy ra không bị chặn trên.

Vậy .

Vậy .

1. Cho dãy số  xác định bởi: .

a) Chứng minh rằng ;.

b) Với mỗi số nguyên dương , đặt . Tính .

**Hướng dẫn giải**

a) Xét .

Bằng quy nạp chứng minh được .

Xét .

.

Do đó  là dãy tăng và .

Giả sử  bị chặn trên .

Do đó:  (vô lý). Suy ra  không bị chặn trên. Vậy .

b) Từ (\*), suy ra: .

Suy ra: .

Vậy .

**3.2. TÍNH GIỚI HẠN BẰNG CÁC CÔNG THỨC CƠ BẢN**

1. Cho dãy số  thỏa mãn . Tìm tất cả các số thực  sao cho dãy số  xác định bởi  () hội tụ và giới hạn của nó khác 0.

**Hướng dẫn giải**

Từ giả thiết ta có dãy số  là dãy số dương và tăng(1).

Giả sử  bị chặn trên suy ra nó hội tụ. Đặt , ta có ngay  (vô lý).

Vì vậy  không bị chặn trên (2).

Từ (1) và (2) ta có .

Xét . Đặt  (), ta có .

.

Suy ra . Từ đó  (sử dụng trung bình Cesaro).

Ta có .

Vậy  là giá trị cần tìm.

1. Cho dãy số  xác định như sau: 

a) Chứng minh rằng tồn tại vô số giá trị nguyên dương của n để .

b) Chứng minh rằng  có giới hạn hữu hạn, tìm giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

a) Trước hết ta luôn có . Xét (1).

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được  và .

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

b) Ta có  (2).

Chia vế của (1) cho (2) có .

Đặt , ta có .

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được , với  là dãy số Phibonxi: .

Hay  khi , dẫn đến .

1. Cho dãy số  được xác định như sau.

 .

Đặt , hãy tính .

**Hướng dẫn giải**

Dễ thấy .

Theo bài ra ta có.

.

Suy ra .

Do đó .

Mặt khác, từ  ta suy ra .

Kết hợp với  ta có.

.

Từ đó ta có .

1. Cho dãy số thực  với  thỏa mãn .

Tìm .

**Hướng dẫn giải**

Với mỗi , đặt .

Ta có .

.

Do đó  là hàm tăng thực sự trên .

Ta có .

Do đó  sao cho  và .

Ta thấy .

Do đó: .

Vậy .

1. Cho dãy số  thỏa mãn: .

Tìm .

**Hướng dẫn giải**

Dễ thấy . Từ giả thiết ta có .

Với mỗi , đặt ta có  và.

.

Do đó  .

Vậy .

1. Tính các giới hạn sau:

a) . b) .

**Hướng dẫn giải**

*.*

*.*

1. Tính giới hạn .

**Hướng dẫn giải**

.

.

.

1. Cho  là số nguyên dương và .Chứng minh rằng: .

**Hướng dẫn giải**

Đặt  khi đó từ .

Vậy .

1. Tính các giới hạn sau:.

a/  b/.

**Hướng dẫn giải**

Câu a.

.

.

.

Mà ta có các công thức:;;.

Do đó:là một đa thức bậc  có hệ số bậc  là .

Và là một đa thức bậc  có hệ số bậc  là .

Do đó:.

Câu b.

=.

Vì .

Vì và áp dụng công thức , nên.

1. Cho dãy số  thỏa mãn **.** Tìm  với **.**

**Hướng dẫn giải**

Ta có 

Với n:  (1).

 (2).

Từ (1) và (2) ta có .

Suy ra .

.

 suy ra =.

1. Tính giới hạn hàm số : .

**Hướng dẫn giải**

Ta có:.

.

= .

= .

= .

= = .

1. Tính: .

**Hướng dẫn giải**

.

1. Cho dãy số  thỏa mãn: . Tìm .

**Hướng dẫn giải**

Dễ thấy . Từ giả thiết ta có .

Với mỗi , đặt ta có  và.

.

Do đó  .

Vậy .

1. Cho dãy số  thỏa mãn .

**Hướng dẫn giải**

Ta có  với mọi .

Do đó dãy  bị chặn dưới.

Với mọi , ta có  ⇒ .

Do đó  là dãy giảm.

Từ đó suy ra dãy  có giới hạn và dễ dàng tìm được .

1. Cho dãy số thực : . Xét dãy số  cho bởi :

 Chứng minh dãy số có giới hạn hữu hạn và tính giớn hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

▪ Ta có : .

▪ Đặt :  thì ta có .

.

.

.

.

Khi đó : . Suy ra  là dãy truy hồi tuyến tính cấp 2.

Xét phương trình đặc trưng : .

Dãy có số hạng tổng quát dạng .

trong đó : .

▪ Lúc này, ta có.

.

Suy ra : .

▪ Vậy : .

1. Cho dãy số  xác định bởi: , . Tìm .

**Hướng dẫn giải**

Từ giả thiết  ta có  nên  xác định bởi  có giới hạn hữu hạn, giả sử ( hữu hạn).

Cũng từ  ta có .

.

Do đó .

.

….

.

Cộng theo vế ta được : .

.

Mà  ( do) nên.

 hay .

1. Cho dãy số  xác định bởi : . Chứng minh dãy  có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

Ta có .

Hàm số  liên tục và nghịch biến trên [0,+), .

Ta có   bị chặn.

.

suy ra dãy tăng và dãygiảm suy ra  là các dãy hội tụ.

Giả sử .

Từ .

Từ .

Giải hệ phương trình . Vậy .

1. Cho  và , Tìm .

**Hướng dẫn giải**

Ta có  và **.**

Dãy này rõ ràng hội tụ và có giới hạn là.

Từ đó suy ra .

**3.3. TÍNH GIỚI HẠN BẰNG ĐỊNH LÍ KẸP**

1. Tìm .

**Hướng dẫn giải**

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức : n! > ( ) n (\*) (∀ n N\*).

Bằng phương pháp qui nạp. Thật vậy : với n =1, ta có 1 >  (đúng).

Giả sử (\*) đúng với n = k tức là : k! > ( )k. Ta đi chứng minh (\*) đúng với.

n = k+1.

Ta có (k+1)! = k!(k+1) >( ) k (k+1) = ( )k+1. > ( )k+1.

Bất đẳng thức cuối này đúng vì :.

(1+ )k =1++ +.+.=.

= 1+1++.+< 1+1+ +… +<1+1++.+<.

<1+1++.++.< 1+ = 3.

Vậy (\*) đúng với . Do đó , từ đây ta suy ra .

=> 0 <  <.

Vì  = 0.

Do đó theo định lý về giới hạn kẹp giữa ta suy ra:  = 0.

Vậy =2014.

Cho dãy số  thoả mãn .

Tính .

Từ giả thiết suy ra mội số hạng của dãy đều dương.

Đặt , ta có dãy .

Lại đặt , ta có dãy  .

Tìm được số hạng tổng quát của dãy là .

Từ đó ta có .

1. Cho dãy : .

a) Chứng minh dãy  hội tụ và tính .

b) Chứng minh .

**Hướng dẫn giải**

a) Bằng phương pháp chứng minh qui nạp ta có: .

Đặt  và xét hàm .

Suy ra , như vậy  nghịch biến trên đoạn .

Dẫn đến .

Kết hợp công thức xác định dãy ta được.

.

Vậy .

b) *Nhận xét:*  thì .

Dẫn đến , .

 (1).

Như vậy bất đẳng thức đúng với .

Trường hợp , chú ý , kết hợp với (1) thu được:.

.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

1. Cho dãy số thực . Chứng minh dãy trên có giới hạn hữu hạn, tìm giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

Chứng minh .

Với  đúng.

Giả sử  đúng với , ta chứng minh  đúng với .

Ta có .

;  (luôn đúng).

Vậy (1) được chứng minh.

Xét hàm  trên . Ta có .

Hàm  có  với mọi nên hàm này đồng biến trên .

Suy ra , suy ra .

hay hàm  nghịch biến trên .

Ta có .

Suy ra .

Quy nạp ta được dãy  giảm và dãy  tăng.

Hơn nữa  nên mỗi dãy trên tồn tại giới hạn hữu hạn.

Giả sử , lấy giới hạn hai vế ta được.

.

Đặt , ta được phương trình .

Hàm  nghịch biến nên phương trình có nhiều nhất 1 nghiệm, nhận thấy  là nghiệm nên nó là nghiệm duy nhất.

Suy ra , thay vào được .

Vậy .

1. Cho dãy số  thỏa mãn  và dãy  thỏa mãn . Chứng minh dãy  có giới hạn và tìm giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

Ta có .

Do đó .

Ta chứng minh bằng quy nạp rằng .

Thật vậy:.

- Với n = 1, ta có  nên khẳng định đúng.

- Giả sử khẳng định đúng với n . Ta có , ta cần chứng minh .

.

Bất đẳng thức cuối đúng nên khẳng định trên đúng với .

Theo nguyên lí qui nạp thì khẳng định được chứng minh.

Ta có .

Theo nguyên lí kẹp thì dãy  có giới hạn và .

1. Cho dãy số  được xác định bởi: .

Chứng minh dãy số hội tụ và tìm .

**Hướng dẫn giải**

Ta chứng minh .

Thật vậy:  : .

(\*) đúng với .

Giả sử (\*) đúng tới , *k*, nghĩa là có : .

Ta chứng minh (\*) cũng đúng với *n= k+*1. Thật vậy .

 .

 ( vì khi  thì ).

.

⇒ (\*) cũng đúng với .

Vậy .

.

Vậy dãy hội tụ và có .

1. Cho phương trình:  với *n**N*, .

1)Chứng minh rằng với mỗi số nguyên , thì phương trình có một nghiệm dương duy nhất .

2)Xét dãy số sau đây: ,  Tìm .

**Hướng dẫn giải**

Xét phương trình:  , với *n* nguyên,  **(1)**.

+) Ta có: . Do , nên khi  thì . Vậy  là hàm số đồng biến trên .

Lại có:  ;  ( vì  nguyên và  *n*3).

Ta có:  và  liên tục, đồng biến nên phương trình  có nghiệm duy nhất trên .

+) Mặt khác với  thì  ( do  ) suy ra  với mọi .

Như vậy ta đã chứng minh được (1) có nghiệm dương duy nhất với mọi *n* nguyên, .

Gọi  là nghiệm dương duy nhất của phương trình .

Bây giờ xét dãy  với , .

Ta có:  hay .

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có:.

 <  **(2)**.

(Chú ý rằng ở đây  nên , vì thế trong bất đẳng thức không có dấu bằng).

+) Mặt khác do , nên , nên từ (2) có:  **(3)**.

Bất đẳng thức **(3)** đúng với mọi n3 và  nên từ **(3)** ta có: .

+) Ta có: .

Từ đó:  **(5)**.

Đặt .

Ta có: suy ra từ **(5) .**

Vậy: .

1. Cho số thực xét dãy số được xác định bởi. Tìm tất cả các giá trị của  để dãy số có giới hạn hữu hạn, tìm giới hạn đó?.

**Hướng dẫn giải**

Với thì nên .

Với  thì .

Do đó .

Từ đó, tính được ,.

Kết luận + .

+ .

+ **.**

1. Cho dãy số  xác định như sau:**.** Tìm .

**Hướng dẫn giải**

Ta có : .

Xét hàm số : .

.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

.

Ta có :.

.

Vậy :  thì .

.

Gọi a là nghiệm của : .

Ta có : .

Theo định lí La-grăng : .

Do .

.

Mà .

Vậy : .

1. Cho dãy số  xác định như sau: . Chứng minh rằng dãy số  có giới hạn và tìm giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

\* Vì  nên .

\* Áp dụng BĐT Cauchy ta có . Dấu bằng xảy ra .

.

\* .

\* .

Xét hàm số .

 nghịch biến trên .

\* Vì .

giảm và bị chặn dưới  có giới hạn hữu hạn.

\* Giả sử  . Từ  chuyển qua giới hạn ta có.

.

\* Vậy .

1. Cho dãy số  được xác định bởi:  và , với . Tìm .

**Hướng dẫn giải**

Với mọi  ; ta có.

.

 (1).

Từ (1) ta có: (2).

Mặt khác, vì  nên từ  và chứng minh bằng quy nạp ta thu được  với mọi .

Do đó . Khi đó, .

nên theo nguyên lý kẹp giữa ta có: .

Vậy, từ (2) suy ra: .

Mặt khác, hàm số  liên tục trên nửa khoảng  nên.

.

Kết luận: .

1. a) Chứng minh rằng có đúng một dãy số thực thỏa mãn.

và.

b) Với dãy  xác định như trên, xét dãy  xác định bởi  Chứng minh rằng dãy có giới hạn hữu hạn khi . Hãy tìm giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

a) Bằng quy nạp ta sẽ chỉ ra rằng  xác định duy nhất với mỗi  Để làm được điều này ta cần dùng kết quả (chứng minh của nó là đơn giản) sau: Với mỗi số thực , phương trình  có đúng một nghiệm trên .

b) Để ý rằng .

Ta có giới hạn cần tìm bằng .

1. Giả sử  là dãy Fibonacci ( với ). Chứng minh rằng nếu  với mọi thì dãy số , trong đó  là xác định và nó có giới hạn hữu hạn khi n tăng lên vô hạn. Tìm giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

Giả sử  đã được xác định. Khi đó  được xác định khi .

\* Nếu  thì do  nên .

Từ giả thiết  ta viết , .

Giả sử , với i nào đó, .

Vì  nên .

Khi đó . Mâu thuẫn với giả thiết . Như vậy  là dãy số xác định.

Phương trình  có hai nghiệm . Có hai trường hợp xảy ra:.

*Trường hợp 1*: . Khi đó . Do đó .

*Trường hợp 2*: . Chú ý . Do đó .

Đặt , ta có.

.

Từ đó có  nên  khi (vì ).

Từ  suy ra  dần tới *u* khi (do ).

Tức là trong trường hợp này .

1. Cho dãy số  thỏa mãn . Chứng minh rằng dãy số  có giới hạn bằng 0 khi .

**Hướng dẫn giải**

Từ giả thiết ta có , do đó dãy số  là dãy tăng, vì.

vậy .

,.

. Mà  nên theo định lý kẹp ta có.

.

1. Cho  là một dãy số dương. Đặt  với  Giả sử  với  Tìm .

**Hướng dẫn giải**

Ta có  là dãy số tăng.

Nếu dãy số  bị chặn trên thì là một dãy hội tụ và .

Xét trường hợp dãy số  không bị chặn trên thì .

Từ giả thiết ta có .

Từ đây ta thu được .

Do đó .

Theo nguyên lí kẹp ta có .

Vậy trong mọi trường hợp ta đều có .

1. Cho dãy số  xác định bởi công thức truy hồi:  Chứng minh rằng dãy  có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

Đặt . Khi đó.

.

Mặt khác  nên.

.

Từ (\*) và (\*\*) suy ra: .

Vậy:  Do đó  là đơn điệu giảm và bị chặn dưới nên tồn tại .

Vì  liên tục trên  nên.

.

Vậy dãy  được phân tích thành hai dãy con hội tụ tới cùng một giới hạn. Do đó dãy  có giới hạn bằng **.**

1. Tìm tất cả các hàm số  thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau đây:.

1.  với mọi .

2.  với mỗi .

**Hướng dẫn giải**

 và bởi vì  nên .

.

.

.

Dùng quy nạp theo  ta CM được .

Cố định  ta có .

Xét dãy  ta có : .

Vậy .

Vậy .

Kết hợp ( 1) và (3) ta được .

Từ (2) . Kết hợp ( 2) và (4) ta được .

Thử lại  ta thấy đúng.

1. Cho dãy số  được xác định như sau **.** Chứng minh rằng  có giới hạn hữu hạn khi  dần đến vô cùng.

**Hướng dẫn giải**

Dễ thấy , với mọi n nguyên dương, nên dãy số đã cho là dãy tăng thực sự.

Vậy để chứng minh dãy số có giới hạn hữu hạn ta chỉ cần chứng minh nó bị chặn trên.

Ta chứng minh .

Thật vậy, với  nên điều cần chứng minh đúng.

Giả sử ta có: , với  nguyên dương. Ta cần chứng minh .

Theo công thức xác định dãy số có: .

Do đó  với mọi n nguyên dương từ đó suy ra điều phải chứng minh.

1. Cho dãy số thực  xác định bởi**.** Chứng minh rằng dãy  có giới hạn hữu hạn. Hãy tìm giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

Có , giả sử . Từ công thức truy hồi ta có:.

 vì .

Vậy bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được .

Xét hai dãy số mới  và  với .

Có , giả sử ta có , khi đó.

.

Vậy bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được  là dãy số tăng và bị chặn trên bởi 1, nên nó có giới hạn hữu hạn .

Chuyển công thức truy hồi qua giới hạn tìm được .

Do  nên suy ra .

Chứng minh tương tự đối với dãy số , ta cũng có .

Cuối cùng ta chứng minh  (1) bằng phương pháp quy nạp:.

Ta có  và , với n = 1, 2 bất đẳng thức (1) đúng. Giả sử (1) đúng tới , tức là . Khi đó.

.

Từ  và áp dụng định lý kẹp ta suy ra được .

1. Cho hai dãy số  xác định bởi ,  và  với n = 1, 2, 3,….Tìm  và .

**Hướng dẫn giải**

Với mọi n = 1,2,3,… ta có.

.

Do đó:.

.

Tương tự ta có: .

Từ đó:;.

Chú ý:  và , nên theo nguyên lí kẹp ta có: .

Mặt khác:  hay . Suy ra: . Do đó =  (vì ).

1. Cho dãy số thực  xác định bởi . Chứng minh rằng dãy  có giới hạn hữu hạn. Hãy tìm giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

+ Ta Có , giả sử . Từ công thức truy hồi ta có:.

 vì .

Vậy bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được .

+ Xét hai dãy số mới .

và .

- Có , giả sử ta có , khi đó.

.

Vậy bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được  là dãy số tăng và bị chặn trên bởi 1, nên nó có giới hạn hữu hạn . Chuyển công thức truy hồi qua giới hạn tìm được . Do  nên suy ra .

- Chứng minh tương tự đối với dãy số , ta cũng có .

- Cuối cùng ta chứng minh  **(1)** bằng phương pháp quy nạp:.

Ta có  và , với n = 1, 2 bất đẳng thức (1) đúng. Giả sử (1) đúng tới , tức là . Khi đó.

.

+ Từ  và áp dụng định lý kẹp ta suy ra được .

1. Tìm giới hạn: .

**Hướng dẫn giải**

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức: (\*)  ).

Bằng phương pháp qui nạp. Thật vậy: với , ta có  (đúng).

Giả sử (\*) đúng với  tức là: . Ta đi chứng minh (\*) đúng với.

.

Ta có  . .

Bất đẳng thức cuối này đúng vì:.

.

Vậy (\*) đúng với . Do đó , từ đây ta suy ra >.

=> . Vì .

Do đó theo định lý về giới hạn kẹp giữa ta suy ra:  = 0.

Vậy =2014.

**3.4. CÁC DẠNG KHÁC**

1. Tìm các giá trị thực của tham số  để dãy số : có giới hạn hữu hạn.

**Hướng dẫn giải**

\*) .

Xét hàm số:  ta có  nghịch biến trên .

Suy ra đơn điệu và bị chặn.

+ .

.

Giả sử .

.

Khi  hệ (I) có nghiệm duy nhất ⇒  có giới hạn hữu hạn.

Khi  hệ (II) có nghiệm duy nhất lớn hơn  và hệ (III) có nghiệm thỏa mãn . Do đó  không có giới hạn.

.

 không có giới hạn.

+.

+.

 không có giới hạn.

\*)  tượng tự ta có  và .

1. Cho số thực xét dãy số được xác định bởi . Tìm tất cả các giá trị của  để dãy số có giới hạn hữu hạn, tìm giới hạn đó?.

**Hướng dẫn giải**

Với thì nên .

Với  thì .

Do đó .

Từ đó, tính được ,.

Kết luận + .

+.

+.

1. Cho hai dãy số dương  xác định bởi:  và . Với mọi . Chứng minh rằng hai dãy trên hội tụ và tìm giới hạn của chúng.

**Hướng dẫn giải**

Ta chứng minh bằng quy nạp . Thật vậy.

Với , ta có , vậy  đúng.

Với , ta có , vậy  đúng.

Giả sử khẳng định đúng đến , tức là .

Ta chứng minh . Thật vậy. Từ  ta có.



Khi đó từ , suy ra .

Như vậy theo nguyên lý quy nạp thì .

Do đó .

Kết luận: .■.

1. Cho dãy số xác định như sau : . Tìm điều kiện của  để dãy số  có giới hạn hữu hạn khi  và tính giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

Ta có: .

\* Suy ra dãy số  tăng knn ; từ đó dãy số  có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi dãy bị chặn trên.

Giả sử , thì chuyển qua giới hạn hệ thức  ta có: .

- Nếu có chỉ số  mà  thì  trái với kết quả .

Do đó:  với mọi  hay .

.

\* Đảo lại: Nếu .

.

và .

Bằng quy nạp ta chứng minh được  (H/s trình bày ra).

Như vậy dãy  tăng knn, bị chặn trên bới , do đó dãy số  có giới hạn hữu hạn.

*Kết luận:* Với điều kiện  thì dãy số  có giới hạn hữu hạn khi  và .

1. Cho dãy số  thỏa mãn . Tìm *a* sao cho dãy số xác định và có giới hạn hữu hạn.

**Hướng dẫn giải**

Đặt . Ta có . Ta có.

.

Bảng biến thiên.

Ta xây dựng dãy số như sau .

Nhận thấy .

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy .

.

Bằng quy nạp ta chứng minh được dãy  đơn điệu giảm, bị chặn bởi 0 và , dãy  đơn điệu tăng và bị chặn bởi  và 0. Từ đó tồn tại .

Ta có .

 (\*).

(do  liên tục trên ,  và ).

Xét . Ta có  nên . Vậy .

Tương tự ta chứng minh được dãy  đơn điệu tăng, hội tụ về .

+) Nếu  thì  nên ta có dãy .

Dãy này không hội tụ.

+) Nếu  ta có dãy .

Dãy này không hội tụ.

+) Nếu tồn tại *n* sao cho  thì ta có.

.

Khi đó không tồn tại .

Vậy nếu  thì dãy không xác định.

+) Nếu  thì hai dãy con  cùng hội tụ về 0 nên giới hạn của dãy là 0.

Nếu  thì  và hàm số đồng biến nên dãy đơn điệu giảm, bị chặn dưới bởi 1. Khi đó dãy hội tụ về 1.

+) Nếu  thì . Khi đó ta có thể khảo sát dãy từ . Trường hợp này dãy đơn điệu giảm và bị chặn dưới bởi  nên hội tụ về.

+) Nếu a = 1 thì  nên dãy hội tụ về .

+) Nếu  ta có  và  nên tồn tại  sao cho  (Thật vậy, các số hạng của  không thể cùng nằm bên trái a do , chúng cũng không thể cùng nằm bên phải  do nếu thế thì ).

Vậy . Khi đó ta lại có dãy đơn điệu giảm, bị chặn dưới bởi 1 nên hội tụ về 1.

Vì f(x) là hàm lẻ nên trường hợp  ta khảo sát tương tự.

Kết luận: Điều kiện để dãy xác định và có giới hạn hữu hạn là.

.

1. Cho dãy số  xác định bởi  và . Chứng minh rằng .

**Hướng dẫn giải**

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có  (do ).

Nhận xét: .

Ta sẽ chứng minh nhận xét này bằng phương pháp quy nap.

Thật vậy.

Với  ta có  (đúng).

Giả sử .

Ta có .

.

 (đúng).

Suy ra .

Như vậy  (điều phải chứng minh).

Mặt khác, .

(1).

Áp dụng (1) ta có.

.

Suy ra .

.

.

 (2).

Ta lại có  (do ).

Suy ra .

Từ (2)  (vì ).

.

Mà .

Do đó  hay .

1. Cho  và . Xét dãy số  được xác định bởi: , với mọi . Chứng minh dãy số  có giới hạn hữu hạn khi  Hãy tìm giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

\* Theo bất đẳng thức Côsi ta có:.

, với . (1).

Do đó: .

Từ (1) và (2) ta có dãy số  giảm và bị chặn dưới bởi ;.

suy ra dãy số  có giới hạn hữu hạn khi .

Giả sử ; ().

Chuyển qua giới hạn hệ thức .

ta có phương trình .

 (thỏa mãn điều kiện).

Vậy .

1. Cho trước số thực dương  và xét dãy số dương  thỏa mãn  với mọi . Chứng minh rằng dãy  hội tụ và tìm giới hạn của nó.

**Hướng dẫn giải**

Xét hàm số .

Ta có ; .

Ta có bảng biến thiên của hàm f(x):.

.

Suy ra .

Do đó .

Suy ra  hay  là dãy giảm. Kết hợp với  với mọi *n* ta suy ra dãy  hội tụ.

Đặt . Chuyển qua giới hạn ta được .

Vậy .

1. Tìm tất cả các hằng số sao cho mọi dãy số dãy số thỏa mãn đều hội tụ. Với giá trị  tìm được hãy tính giới hạn của dãy .

**Hướng dẫn giải**

Ta xét các trường hợp sau.

+ Nếu , thì từ giả thiết, ta có .

Từ đây bằng quy nạp, ta suy ra . Do  nên  khi . Do đó,  không thỏa mãn.

+ Nếu , thì tồn tại  sao cho . Thật vây, lấy  đặt , thì.

.

Chú ý là  Do đó, ta chỉ cần chọn như trên và  thì được 2 bất đẳng thức nêu trên.

Xét dãy số xác định bởi.

.

thì dãy thỏa mãn giả thiết nhưng không hội tụ. Thành thử,  cũng không thỏa mãn.

+ Nếu , thì . Suy ra dãy tăng và bị chặn. Do đó, hội tụ.

Đặt thì từ giả thiết ta có  hay  Vậy .

1. Cho dãy số  xác định như sau: , , . Tìm giới hạn của dãy  với .

**Hướng dẫn giải**

Bằng phép quy nạp đơn giản ta thấy rằng: .

Xét tính đơn điệu của dãy . Từ hệ thức  ta suy ra được , vậy dãy số  tăng.

Tính tổng: Từ hệ thức truy hồi (1) ta suy ra được .

 với .

Thay n bởi 1, 2, 3,., n vào (\*) và cộng vế với vế các đẳng thức ta suy ra :.

.

Do dãy  là dãy tăng nên có hai khả năng sau xảy ra:.

1) Dãy  bị chặn trên. Theo tiêu chuẩn Weierstrass, nên  tăng và bị chặn trên nên nó có giới hạn. Giả sử . Chuyển qua giới hạn hệ thức (1) khi  ta có: , vô lý.

2) Dãy không bị chặn trên, do  tăng và không bị chặn trên nên .

Vì thế từ (2) ta suy ra: .

1. Cho dãy số (un) thỏa mãn : . Tính .

**Hướng dẫn giải**

.

Do  => .

suy ra  (1).

Lại có.

.

=> .

Suy ra.

.

Do .

và  (*Bất đẳng thức Bunhiacopxki*).

suy ra  (2).

Từ (1) và (2) suy ra.

.

Do đó .

1. Cho số thực *a*, xét dãy số xác định bởi: Chứng minh rằng dãy số trên có giới hạn hữu hạn khi .

**Hướng dẫn giải**

Đặt .

.

.

Áp dụng định lí Lagrange cho hàm sốliên tục và có đạo hàm trên , thì với mọi số thực *x,y* tồn tại  sao cho:.

.

Với  ta có: .

Mặt khác: bị chặn.

Do đó: .

Vậy là dãy Cauchy, nên dãy số đã cho hội tụ.

1. Cho hai dãy số  và  xác định như sau: và khi . Chứng minh rằng hai dãy  và  có giới hạn và tìm giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

Ta có  suy ra  mà  khi .

Suy ra .

.

bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được.

.

.

Mặt khác  nên ta có.

.

.

Do đó.

.

1. Với mỗi , đặt .

a) Chứng minh đa thức  có duy nhất 1 nghiệm thực thuộc .

b) Chứng minh tồn tại giới hạn của dãy .

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có .

nên trong mỗi khoảng ,  có 1 nghiệm của phương trình .

Mặt khác, ta có  nên đa thức  có duy nhất 1 nghiệm  thuộc khoảng .

b) Ta có .

Do  có nghiệm không là nghiệm của nên nghiệm của phương trình  là nghiệm của phương trình:.

.

Ta có: .

Nên nghịch biến trên .

Lại có: .

⇒ .

.

Do đó dãy  là dãy giảm.

Lại có . Vậy dãy  có giới hạn.

1. Cho  và ,Tìm .

**Hướng dẫn giải**

Ta có .

.

.

.

1. Cho dãy  axác định bởi: . Tìm  nhỏ nhất thỏa mãn .

**Hướng dẫn giải**

Ta có  và . Chứng minh bằng quy nạp ta được  (\*).

Ta lại có: .

.

Do đó: .

Suy ra .

Mặt khác, chứng minh bằng quy nạp ta được dãy  tăng. Do đó nếu dãy  có giới hạn hữu hạn  thì . Vì phương trình  có duy nhất nghiệm là , bởi vậy dãy  không có giới hạn hữu hạn. Suy ra  (\*\*).

Với mọi  thì từ  suy ra tồn tại  sao cho . Do đó .

1. Cho  số thực: , . Xét dãy số  xác định như sau:..

Biết dãy số lập thành một cấp số cộng, chứng minh rằng  là số nguyên (với  là phần nguyên của số thực  – số nguyên lớn nhất không vượt quá  ).

**Hướng dẫn giải**

Đặt , . Gọi d là công sai của cấp số cộng , thì: .

Với mọi  ta luôn có: .

Cộng vế với vế của  bất đẳng thức cùng chiều, ta được:.

.

Thay  bởi  và thay  bởi , có:.

.

.

Cộng vế với vế của 2 bất đẳng thức cùng chiều nói trên thu được:.

.

.

.

.

Vì  nên suy ra . Mặt khác dãy  gồm toàn số nguyên nên công sai  cũng là số nguyên. Vậy  nguyên. (đpcm).

1. Cho dãy số  thỏa mãn: . Chứng minh dãy số trên có giới hạn.

**Hướng dẫn giải**

\*) Ta chứng minh  với mọi  (1).

Thật vậy đúng.

Giả sử (1) đúng với  : .

.

= .

.

.

 (đpcm).

\*) Ta chứng minh  có giới hạn.

NX:  tăng và  với mọi .

Ta có .

.

 với mọi .

Vậy  có giới hạn.

1. Cho dãy số  tăng,và . Xét dãy số  xác định bởi . Chứng minh rằng tồn tại .

**Hướng dẫn giải**

Dễ dàng thấy rằng dãy  tăng ngặt.

Trường hợp 1. Nếu .

.

vậy dãy  bị chặn trên do đó tồn tại .

Trường hợp 2. Nếu .

 thật vậy .

.

Ta chứng minh (\*\*).

Xét hàm số  Trên đoạn .

Hàm số thoả mãn điều kiện của định lí Lagrăng nên tồn tại số  thoả mãn  (đpcm).

Từ đó ta có dãy  bị chặn trên do đó tồn tại .

1. Cho dãy số xác định bởi . Đặt . Chứng minh tồn tại  ( trong đó  là phần nguyên của ).

**Hướng dẫn giải**

Ta có .

Suy ra .

Chứng minh .

Ta có : .

 suy ra dãy đã cho là tăng.

Như vậy .

Vậy , suy ra .

1. Cho dãy số  được xác định như sau .

Tìm các giới hạn sau:  và .

**Hướng dẫn giải**

Ta có: :  (1).

Áp dụng (1) ta suy ra: .

Theo quy nạp ta có:  (2).

Lập luận tương tự ta cũng có:  (3).

Từ (2) và (3) ta suy ra: .

Lại có: , từ đó suy ra: .

Tương tự ta có : .

Mặt khác ta có: . Do đó ta có dãy bất đẳng thức sau:.

.

Như vậy theo định lí kẹp ta suy ra .

Hơn nữa theo đề bài ta có: .

Suy ra: .

Vậy .

.

.

Tóm lại ta có:  và .

1. Cho dãy số  xác định bởi  và . Chứng minh rằng .

**Hướng dẫn giải**

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có  (do ).

Nhận xét: .

Ta sẽ chứng minh nhận xét này bằng phương pháp quy nap.

Thật vậy.

Với  ta có  (đúng).

Giả sử .

Ta có .

.

 (đúng).

Suy ra .

Như vậy  (điều phải chứng minh).

Mặt khác, .

(1).

Áp dụng (1) ta có.

.

Suy ra .

.

.

 (2).

Ta lại có  (do ).

Suy ra .

Từ (2)  (vì ).

.

Mà .

Do đó  hay .

1. Cho trước số thực dương  và xét dãy số dương  thỏa mãn  với mọi . Chứng minh rằng dãy  hội tụ và tìm giới hạn của nó.

**Hướng dẫn giải**

Xét hàm số .

Ta có ; .

Ta có bảng biến thiên của hàm  :.

.

Suy ra .

Do đó .

Suy ra  hay  là dãy giảm. Kết hợp với  với mọi *n* ta suy ra dãy  hội tụ.

Đặt . Chuyển qua giới hạn ta được .

Vậy .

1. Cho dãy số thực  thỏa mãn . Chứng minh rằng dãy  có giới hạn hữu hạn, tìm giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

Xét dãy .

Ta thấy .

Ta có .

Vậy dãy  tăng, bị chặn trên nên hội tụ, .

Chuyển qua giới hạn ta được: .

Ta sẽ chứng minh  (\*) bằng quy nạp theo n.

Ta có . Giả sử .

Suy ra .

.

Vậy (\*) đúng với mọi n nguyên dương. Từ đó suy ra .

1. Cho dãy số thực  xác định bởi:. Chứng minh dãy số  có giới hạn và tìm giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

Dễ dàng quy nạp .

Ta có: =.

Vậy  với mọi  nên dãy bị chặn.

Xét  khi .

Ta có:.

.

.

Áp dụng định lý Lagrang có:.

 Do đó .

1. Cho dãy số  xác định bởi: . Tìm .

**Hướng dẫn giải**

Vì  nên đặt .

Ta có .

Bằng quy nạp, ta có thể chứng minh được .

Xét.

.

Bài 1. Cho dãy số  xác định bởi.

.

Chứng minh rằng dãy số có giới hạn hữu hạn. Tính giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

Theo Côsy thì.

 .

dãy giảm, bị chặn bởi 1, vậy dãy có giới hạn.

Từ .

1. Cho dãy số , xác định bởi: . Chứng minh rằng dãy số có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

Xét hàm số  trên . Ta thấy liên tục và nghịch biến trên  (Vì ). Do đó .

Ta có  với mọi n  dãy  bị chặn.

Mặt khác, ta có   .Suy ra dãy  là dãy đơn điệu tăng và bị chặn, còn dãy là dãy đơn điệu giảm và bị chặn, nên các dãy ,  có giới hạn hữu hạn.

Giả sử  và , ().

Từ .

.

Vậy ta có hệ .

Vậy lim  = .

1. Cho dãy số  được xác định bởi với mỗi số nguyên dương n, đặt . Tìm .

**Hướng dẫn giải**

Ta có kết quả sau: với số thực  bất kì, ta có.

.

Do đó  Suy ra dãy là dãy tăng, giả sử bị chặn trên tức là có giới hạn .

Chuyển qua giới hạn điều kiện (\*) ta có phương trình.

.

phương trình này không có nghiệm hữu hạn lớn hơn 2.

Suy ra dãy  tăng và không bị chặn trên nên .

Ta có .

.

.

.

Suy ra .

Vậy .

1. Dãy số thực  được xác định bởi: . Tìm tất cả các giá trị của a để  với mọi số tự nhiên n.

**Hướng dẫn giải**

Giả sử  với .

Từ  có *.*

Lại từ  có .

Suy ra  và .

Từ đó .

Áp dụng liên tiếp bất đẳng thức này, ta có:.

.

Mà  nên phải có .

Thử lại với  thì .

Vậy  là giá trị duy nhất cần tìm.

1. Cho dãy số thực (xn) xác định bởi: .

**Hướng dẫn giải**

Sử dụng bất đẳng thức .

Xét hàm số .

Ta có:  ⇒ f(x) luôn đồng biến với mọi x > 0.

Do đó: . mà  vì .

Vậy ta có .

Mặt khác: .

Vì  ⇔ .

⇒   do .

⇒  là dãy giảm và bị chặn dưới bởi 0 nên tồn tại giới hạn hữu hạn.

Giả sử , ta có phương trình:.

.

Xét hàm số .

.

.

. Do đó  luôn đồng biến và liên tục với mọi .

⇒ phương trình  có nghiệm duy nhất .

Vậy .

1. Cho hai dãy số dương  xác định bởi:  và . Với mọi . Chứng minh rằng hai dãy trên hội tụ và tìm giới hạn của chúng.

**Hướng dẫn giải**

Ta chứng minh bằng quy nạp . Thật vậy*.*

Với , ta có , vậy  đúng.

Với , ta có , vậy  đúng.

Giả sử khẳng định đúng đến , tức là .

Ta chứng minh . Thật vậy. Từ  ta có.

Khi đó từ , suy ra .

Như vậy theo nguyên lý quy nạp thì .

Do đó .

Kết luận: .■.

1. Cho dãy số xác định như sau:.. Tìm điều kiện của  để dãy số  có giới hạn hữu hạn khi  và tính giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

Ta có: .

\* Suy ra dãy số  tăng knn; từ đó dãy số  có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi dãy bị chặn trên.

Giả sử , thì chuyển qua giới hạn hệ thức  ta có: .

- Nếu có chỉ số  mà  thì  trái với kết quả .

Do đó:  với mọi  hay .

.

\* Đảo lại: Nếu .

.

và .

Bằng quy nạp ta chứng minh được .

Như vậy dãy  tăng knn, bị chặn trên bới , do đó dãy số  có giới hạn hữu hạn.

*Kết luận:* Với điều kiện  thì dãy số  có giới hạn hữu hạn khi  và .

1. Cho dãy số  xác định bởi công thức truy hồi  Chứng minh rằng dãy  có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

Đặt . Khi đó.

.

Mặt khác  nên.

.

Từ (\*) và (\*\*) suy ra: .

Vậy:  Do đó  là đơn điệu giảm và bị chặn dưới nên tồn tại .

Vì  liên tục trên  nên .

Vậy dãy  được phân tích thành hai dãy con hội tụ tới cùng một giới hạn. Do đó dãy  có giới hạn bằng .

1. Cho dãy số  xác định . Tính .

**Hướng dẫn giải**

Theo giả thiết ta có:  mà  suy ra.

 do đó dãy là dãy tăng.

Giả sử dãy  bị chặn trên suy ra  với  khi đó.

.

Vô lý do . Suy ra dãy không bị chặn trên do đó.

.

Ta có.

.

.

1. Cho dãy số thực  xác định bởi: . Tính .

**Hướng dẫn giải**

Sử dụng bất đẳng thức .

Xét hàm số .

Ta có:  ⇒ f(x) luôn đồng biến với mọi x > 0.

Do đó: . mà  vì .

Vậy ta có .

Mặt khác: .

Vì  . .

⇒    do .

⇒  là dãy giảm và bị chặn dưới bởi  nên tồn tại giới hạn hữu hạn.

Giả sử , ta có phương trình:.

.

Xét hàm số .

.

.

⇒ . Do đó  luôn đồng biến và liên tục với mọi  ⇒ phương trình  có nghiệm duy nhất .

Vậy .